Тренировочная олимпиада

10 класс

17.04.2017

1. Решите в целых числах уравнение $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$.

2. Имеются одна красная и k синих ячеек, а также колода из $2n$ карт, занумерованных числами от 1 до $2n$. Первоначально вся колода лежит в произвольном порядке в красной ячейке. Из любой ячейки можно взять верхнюю карту и переложить ее либо в пустую ячейку, либо поверх карты с номером, большим на единицу. В зависимости от n определите минимальное значение параметра k, при котором такими операциями можно гарантированно переложить всю колоду в одну из синих ячеек.

3. В треугольнике ABC через O, I обозначены центры соответственно описанной и вписанной окружностей. Вневписанная окружность ω_A касается продолжений сторон AB и AC соответственно в точках K и M, а стороны BC — в точке N. Известно, что середина P отрезка KM лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки O, N и I лежат на одной прямой.

4. Существует ли такой многочлен $P(x, y, z)$ с вещественными коэффициентами степени не более три, задающий взаимно однозначное (биективное) отображение $P\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество натуральных чисел?

Тренировочная олимпиада

10 класс

17.04.2017

1. Решите в целых числах уравнение $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$.

2. Имеются одна красная и k синих ячеек, а также колода из $2n$ карт, занумерованных числами от 1 до $2n$. Первоначально вся колода лежит в произвольном порядке в красной ячейке. Из любой ячейки можно взять верхнюю карту и переложить ее либо в пустую ячейку, либо поверх карты с номером, большим на единицу. В зависимости от n определите минимальное значение параметра k, при котором такими операциями можно гарантированно переложить всю колоду в одну из синих ячеек.

3. В треугольнике ABC через O, I обозначены центры соответственно описанной и вписанной окружностей. Вневписанная окружность ω_A касается продолжений сторон AB и AC соответственно в точках K и M, а стороны BC — в точке N. Известно, что середина P отрезка KM лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки O, N и I лежат на одной прямой.

4. Существует ли такой многочлен $P(x, y, z)$ с вещественными коэффициентами степени не более три, задающий взаимно однозначное (биективное) отображение $P\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество натуральных чисел?