

# Периодические последовательности

группа 10-1

27.03.2017

1. Натуральное число  $n$  не кратно трём. Докажите, что сумма цифр периода дроби  $1/n$  кратна 9.
2. Пусть  $\text{НОД}(m, n) = 1$ . Докажите, что сумма длин периода и предпериода десятичного представления дроби  $m/n$  не превосходит  $\varphi(n)$ .
3. Пусть число  $m$  имеет вид  $m = 2^a 5^b m_1$ , где  $\text{НОД}(m_1, 10) = 1$ . Положим  $k = \max(a, b)$ . Докажите, что период дроби  $1/m$  начинается с  $k + 1$  позиции, и имеет такую же длину как и период дроби  $1/m_1$ .
4. Дана бесконечная последовательность чисел 0, 1, 2. Известно, что если из неё вычеркнуть все вхождения любой цифры, то полученная последовательность будет периодична. Докажите, что исходная последовательность также периодична.
5. В десятичной записи числа  $a$  встречаются все цифры. Выяснилось, что для некоторого натурального  $n$  количество различных цифровых отрезков длины  $n$  десятичной записи числа  $a$  не превосходит  $n + 8$ . Докажите, что число  $a$  рационально.
6. Последовательность  $\{a_n\}$  строится следующим образом:  $a_1 = p$ , где  $p$  — простое число, в десятичной записи которого ровно 300 ненулевых цифр. При любом натуральном  $n$  число  $a_{n+1}$  равняется *периоду* дроби  $1/a_n$ , умноженному на 2 (смотрится период, а не длина периода). Найдите  $a_{2017}$ .
7. Длины периодов двух последовательностей —  $m$  и  $n$  — взаимно простые числа (обе последовательности без предпериода). Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать?