

Комбинаторная геометрия

группа 10-1

09.03.2017

1. На плоскости отметили конечное число точек. Любые три точки можно накрыть треугольником площади 1. Докажите, что все точки можно накрыть треугольником площади 4.
2. Дан выпуклый многоугольник. Докажите, что у него можно выбрать три последовательные вершины так, что проходящая через них окружность содержит многоугольник целиком.
3. Несколько прямых общего положения разбивают плоскость на части. Докажите, что среди частей разбиения есть хотя бы три части, являющиеся внутренностями угла.
4. На плоскости расположены кузнечик и яма — точка и круг диаметра 0.001 соответственно. Кузнечик умеет прыгать параллельно сторонам фиксированного правильного семиугольника на длину 1 (всего 14 различных прыжков). Докажите, что после нескольких прыжков он сможет запрыгнуть в яму.
5. Можно ли поставить на плоскость 100 различных точек A_1, A_2, \dots, A_{100} так, чтобы для любого $1 \leq k \leq 100$ фигура из точек A_1, A_2, \dots, A_k имела ось симметрии?
6. На плоскости нарисовано несколько попарно непараллельных прямых, по каждой из которых со скоростью 1 ползёт жук. Докажите, что в какой-то момент жуки окажутся в вершинах некоторого выпуклого многоугольника.
7. Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Обязательно ли найдется отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух?
8. Докажите, что выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить в некоторый прямоугольник площади 2.
9. Можно ли разложить на столе несколько неперекрывающихся прямоугольных салфеток с параллельными краям стола сторонами таким образом, чтобы каждую салфетку нельзя было сдвинуть хотя бы в одном направлении (горизонтальном или вертикальном), не задевая другие салфетки?