Многочлены, добавка

группа 10-1

06.03.2017

1. Дан приведённый многочлен $P(x)$ 2017-й степени с действительными коэффициентами. Имеется бесконечная последовательность целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что выполнены соотношения $P(a_1) = 0, P(a_2) = a_1, P(a_3) = a_2, \ldots$ Докажите, что не все числа в последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ различны.

2. Пусть $P(x)$ — ненулевой многочлен чётной степени с положительными коэффициентами. Докажите, что коэффициенты этого многочлена можно так переставить, чтобы получившийся многочлен не имел действительных корней.

3. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами удовлетворяет следующим условиям: $P(0) = 1, (P(x))^2 = 1 + x + x^{100} \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} многочлена $(P(x) + 1)^{100}$ равен нулю.

4. Существуют ли два многочлена с целыми коэффициентами такие, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2017, но у произведения этих двух многочленов модули всех коэффициентов не превосходят 1?

5. Пусть $f(x)$ и $h(x)$ — приведенные квадратные трехчлены, графики которых имеют общую точку, а $g(x)$ — многочлен, отличный от константы. Оказалось, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех вещественных x. Докажите, что $f(x) = h(x)$.

Многочлены, добавка

группа 10-1

06.03.2017

1. Дан приведённый многочлен $P(x)$ 2017-й степени с действительными коэффициентами. Имеется бесконечная последовательность целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что выполнены соотношения $P(a_1) = 0, P(a_2) = a_1, P(a_3) = a_2, \ldots$ Докажите, что не все числа в последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ различны.

2. Пусть $P(x)$ — ненулевой многочлен чётной степени с положительными коэффициентами. Докажите, что коэффициенты этого многочлена можно так переставить, чтобы получившийся многочлен не имел действительных корней.

3. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами удовлетворяет следующим условиям: $P(0) = 1, (P(x))^2 = 1 + x + x^{100} \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} многочлена $(P(x) + 1)^{100}$ равен нулю.

4. Существуют ли два многочлена с целыми коэффициентами такие, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2017, но у произведения этих двух многочленов модули всех коэффициентов не превосходят 1?

5. Пусть $f(x)$ и $h(x)$ — приведенные квадратные трехчлены, графики которых имеют общую точку, а $g(x)$ — многочлен, отличный от константы. Оказалось, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех вещественных x. Докажите, что $f(x) = h(x)$.