Многочлены

группа 10-1
27.03.2016

1. Дан многочлен с целыми коэффициентами $ax^3 + bx^2 + cx + d$ такой, что ad — нечётное число, а bc — чётное. Могут ли все корни этого многочлена оказаться рациональными?

2. Дан кубический многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. Тройка различных вещественных чисел (a, b, c) называется *циклической*, если $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$. Тройки (a, b, c), (b, c, a) и (c, a, b) считаем одинаковыми.

   а) Докажите, что существует не более восьми различных циклических троек.

   б) Докажите, что существует не более трёх циклических троек с одинаковой суммой.

3. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, принимающий при натуральных x натуральные значения. Докажите, что существует сколь угодно большое натуральное число n такое, что а) $P(n)$ — составное; б) $P(n)$ имеет более 2017 различных простых делителей; в) числа $P(n), P(n+1), \ldots, P(n+2017)$ — составные. *(Это три независимых пункта задачи.)*

4. Дан такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что для любого натурального n существует натуральное k такое, что $P(k)$ делится на n. Докажите, что для любых натуральных m и s произведение $P(m+1) \cdot P(m+2) \cdot \ldots \cdot P(m+s)$ делится на $s!$

5. Дан многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами такой, что уравнение $P(m)+P(n) = 0$ имеет бесконечно много решений в целых числах m и n. Докажите, что у графика $y = P(x)$ есть центр симметрии.

6. Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n. Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, принимающий в натуральных точках натуральные значения, такой, что $S(P(n))$ при натуральных n принимает каждое своё значение лишь конечное число раз *(иными словами, что $S(P(n)) \to +\infty$ при $n \to +\infty$)*?

7. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, при всех действительных значениях x удовлетворяющие соотношению $P(x^2) + P(x)P(x+1) = 0$.