Теория чисел

10 класс

13.02.17

1. Существует ли 10 таких различных целых чисел, что сумма любых 9 из них является полным квадратом?

2. Дана последовательность натуральных чисел $1 < n_1 < n_2 < \ldots$, среди которых нет последовательных. Докажите, что для любого натурального m между числами $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ и $n_1 + n_2 + \ldots + n_m + n_{m+1}$ (оба невключительно) найдётся квдадрат натурального числа.

3. Докажите, что любое *целое* число можно представить в виде суммы пяти кубов целых чисел.

4. Опишите все натуральные числа, являющиеся суммой двух квадратов целых чисел:

   а) Докажите, что простое число вида $4k + 3$ не является суммой двух квадратов.

   б) Докажите, что при простом $p = 4k + 1$ сравнение $x^2 + 1 \equiv 0$ $(mod\ p)$ разрешимо.

   в) Докажите, что $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ является суммой двух квадратов при любых целых a, b, c, d.

   г) Докажите, что если число mp при натуральном $1 < m < p$ является суммой двух квадратов, то для некоторого натурального $0 < n < m$ число np является суммой двух квадратов.

5. (*Теорема Лагранжа*) Докажите, что каждое натуральное число является суммой четырёх квадратов целых чисел (*подсказка*: докажите, например, для начала, что для любого простого p сравнение $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0$ $(mod\ p)$ разрешимо).

Теория чисел

10 класс

13.02.17

1. Существует ли 10 таких различных целых чисел, что сумма любых 9 из них является полным квадратом?

2. Дана последовательность натуральных чисел $1 < n_1 < n_2 < \ldots$, среди которых нет последовательных. Докажите, что для любого натурального m между числами $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ и $n_1 + n_2 + \ldots + n_m + n_{m+1}$ (оба невключительно) найдётся квдадрат натурального числа.

3. Докажите, что любое *целое* число можно представить в виде суммы пяти кубов целых чисел.

4. Опишите все натуральные числа, являющиеся суммой двух квадратов целых чисел:

   а) Докажите, что простое число вида $4k + 3$ не является суммой двух квадратов.

   б) Докажите, что при простом $p = 4k + 1$ сравнение $x^2 + 1 \equiv 0$ $(mod\ p)$ разрешимо.

   в) Докажите, что $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ является суммой двух квадратов при любых целых a, b, c, d.

   г) Докажите, что если число mp при натуральном $1 < m < p$ является суммой двух квадратов, то для некоторого натурального $0 < n < m$ число np является суммой двух квадратов.

5. (*Теорема Лагранжа*) Докажите, что каждое натуральное число является суммой четырёх квадратов целых чисел (*подсказка*: докажите, например, для начала, что для любого простого p сравнение $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0$ $(mod\ p)$ разрешимо).