Линейные функции на линейном пространстве

группа 10-1
09.02.2017

Определение. *Линейной функцией* на линейном пространстве V над полем $\mathbb{K}$ называется отображение $\phi\colon V \to \mathbb{K}$, удовлетворяющее тождеству $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\ \phi(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda\phi(\mathbf{u}) + \mu\phi(\mathbf{v})$. Линейные функции сами образуют линейное пространство относительно естественных операций. Это пространство обозначается V^* и называется *двойственным к V пространством.*

Ниже пространство V везде предполагается конечномерным.

1. Зафиксируем в пространстве V базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Координаты вектора $\mathbf{x}$ относительно этого базиса будем обозначать $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е. $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$.

   а) Докажите, что если значения двух линейных функций ϕ и ψ совпадают на векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, то $\phi = \psi$.

   б) Докажите, что функция f, заданная формулой $f(\mathbf{x}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, линейна. ($y_1, y_2, \ldots, y_n$ — произвольные элементы $\mathbb{K}$.)

   в) Докажите, что для произвольного набора $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ существует единственная линейная функция ϕ, такая что $\phi(\mathbf{e}_i) = y_i$ при всех i.

   г) Докажите, что $\dim V = \dim V^*$.

2. Пусть $L \subset V$ — подпространство размерности k в пространстве размерности n. Рассмотрим всевозможные линейные функции ϕ, удовлетворяющие $\phi(\mathbf{v}) = 0$ для всех $\mathbf{v} \in L$. Докажите, что эти функции ϕ образуют подпространство $L^* \subset V^*$ и найдите его размерность.

3. Дана однородная система линейных уравнений с коэффициентами в $\mathbb{K}$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

   Пусть A — размерность пространства решений системы, а B — размер максимального линейно независимого поднабора уравнений этой системы. Докажите, что $A + B = n$.

4. *Квадрикой* на координатной плоскости назовём множество нулей многочлена $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ (A, B, C не равны одновременно нулю) с вещественными коэффициентами.

   а) Докажите, что объединений двух прямых на плоскости — квадрика.

   б) Докажите, что через любые пять различных точек плоскости проходит квадрика.

   в) Докажите, что через любые пять различных точек плоскости, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, проходит единственная квадрика.

5. Есть несколько лампочек и несколько кнопок. Каждая кнопка подсоединена к некоторому набору лампочек и при нажатии на неё состояние лампочек из этого набора меняется на противоположное. Подмножество лампочек назовём *инвариантным*, если каждая кнопка меняет состояния чётного числа лампочек этого подмножества. Докажите, что из одного состояния лампочек можно получить другое тогда и только тогда, когда у обоих состояний чётность числа включенных лампочек во всех инвариантных подмножествах совпадает.

6. Дан квадрат, разбитый на клетки 1×1. По линиям разбиения (внутри квадрата или на его границе) проведены несколько контуров, каждый из которых ограничивает некоторый прямоугольник. Может ли оказаться, что через любую сторону любой клетки будет проходить нечетное число указанных контуров?

7. К каждой вершине графа прикручена лампочка, изначально все лампочки выключены. За один раз можно выбрать любую вершину графа и поменять все состояния лампочек в ней самой и во всех её соседях на противоположные. Докажите, что такими операциями весь граф можно включить.

8. В полном графе на n вершинах выделили k полных подграфов на меньшем числе вершин. Оказалось, что каждое ребро исходного графа покрыто ровно одним подграфом. Докажите, что $k \geqslant n$.