

# Гамильтоновы графы

10 класс

06.02.17

**Определение.** *Гамильтоновым путём (циклом)* в графе называется простой путь (цикл), проходящий по всем вершинам графа.

- Докажите, что в любом полном ориентированном графе существует гамильтонов путь.
  - Докажите, что в любом сильносвязном полном ориентированном графе существует гамильтонов цикл.
- В графе степень каждой вершины не меньше  $k$ . Докажите, что в графе существует простой путь длины  $k$ .
  - Пусть в графе  $n$  вершин и степень каждой вершины не меньше, чем  $\frac{n-1}{2}$ . Докажите, что в графе существует гамильтонов путь.
  - (Теорема Дирака) Пусть в графе  $n \geq 3$  вершин. Известно, что степень каждой вершины не меньше, чем  $\frac{n}{2}$ . Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.
  - Пусть в графе  $n$  вершин. Докажите, что если  $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$  для любой пары несмежных вершин  $u$  и  $v$ , то в графе существует гамильтонов путь.
  - (Теорема Оре) Пусть в графе  $n \geq 3$  вершин. Докажите, что если  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$  для любой пары несмежных вершин  $u$  и  $v$ , то в графе существует гамильтонов цикл ( $\deg(v)$  обозначает степень вершины  $v$ ).
- Какое максимальное число рёбер может быть в графе с  $n$  вершинами, в котором нет гамильтонова пути?
- Дан двудольный граф, по  $n$  вершин в каждой доле. Степень каждой вершины больше чем  $\frac{n}{2}$ . Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.
- Дан граф, степень каждой вершины которого равна 3. Известно, что число правильных раскрасок рёбер в 3 цвета не делится на 4. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.
- Дана шахматная доска. *Хромой ладья* назовём фигуру, которая ходит на одну клетку по вертикали или горизонтали. Хромая ладья стартовала в некоторой клетке, обошла всю доску, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и вернулась в исходную клетку. Докажите, что число горизонтальных ходов не равно числу вертикальных.