

Гамильтоновы графы

10 класс

06.02.17

Определение. *Гамильтоновым путём (циклом)* в графе называется простой путь (цикл), проходящий по всем вершинам графа.

- Докажите, что в любом полном ориентированном графе существует гамильтонов путь.
 - Докажите, что в любом сильносвязном полном ориентированном графе существует гамильтонов цикл.
- В графе степень каждой вершины не меньше k . Докажите, что в графе существует простой путь длины k .
 - Пусть в графе n вершин и степень каждой вершины не меньше, чем $\frac{n-1}{2}$. Докажите, что в графе существует гамильтонов путь.
 - (Теорема Дирака) Пусть в графе $n \geq 3$ вершин. Известно, что степень каждой вершины не меньше, чем $\frac{n}{2}$. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.
 - Пусть в графе n вершин. Докажите, что если $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$ для любой пары несмежных вершин u и v , то в графе существует гамильтонов путь.
 - (Теорема Оре) Пусть в графе $n \geq 3$ вершин. Докажите, что если $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ для любой пары несмежных вершин u и v , то в графе существует гамильтонов цикл ($\deg(v)$ обозначает степень вершины v).
- Какое максимальное число рёбер может быть в графе с n вершинами, в котором нет гамильтонова пути?
- Дан двудольный граф, по n вершин в каждой доле. Степень каждой вершины больше чем $\frac{n}{2}$. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.
- Дан граф, степень каждой вершины которого равна 3. Известно, что число правильных раскрасок рёбер в 3 цвета не делится на 4. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.
- Дана шахматная доска. *Хромой ладья* назовём фигуру, которая ходит на одну клетку по вертикали или горизонтали. Хромая ладья стартовала в некоторой клетке, обошла всю доску, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и вернулась в исходную клетку. Докажите, что число горизонтальных ходов не равно числу вертикальных.