Разнобой по алгебре

10 класс

26.01.2017

1. Сумма цифр числа n равна 100, а сумма цифр $5n$ равна 50. Докажите, что n — чётное.

2. К параболам $y = x^2 + 4$ и $y = -x^2 + 2x$ проведены две общие касательные. Докажите, что четырёхугольник с вершинами в точках касания является параллелограммом.

3. Даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство:
$$\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b+2c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \geqslant 27.$$

4. Натуральные числа $a < b < c$ таковы, что $(b+a)$ делится на $(b-a)$, а $(c+b)$ делится на $(c-b)$. Число a записывается 2016 цифрами, а число b — 2017 цифрами. Сколько цифр в числе c?

5. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство: $(ac+bd)^5 + (ad+bc)^5 \leqslant (a+b)^5(c^5+d^5)$.

6. Вася перемножил несколько квадратных трёхчленов вида $x^2 + px + q$ и в результате получил многочлен, все коэффициенты которого положительны. Докажите, что хотя бы у одного из исходных трёхчленов все коэффициенты были также положительны.

7. Докажите, что для любого многочлена $x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами существует такой многочлен $2x^2 + cx + d$ с целыми коэффициентами, что множества их значений в целых точках не пересекаются.

8. Последовательность натуральных чисел $a(n)$ строится следующим образом: $a(1) = 1$; при $n \geqslant 2$ $a(n)$ — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее свойствам: числа $a(1), a(2), \ldots, a(n)$ — различны; $a(1) + a(2) + \ldots + a(n)$ делится на n. Докажите, что $a(a(n)) = n$ при всех n.