Разнобой по комбинаторике

группа 10-1

23.01.2017

1. В центре клетчатой полоски 2017×1 стоит фишечка. Два игрока по очереди её передвигают: первый — на 1 клетку, второй — на 2, первый — на 4, второй — на 8, и так далее (длины ходов — последовательные степени двойки). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. А кто выигрывает?

2. На плоскости расположены несколько квадратных салфеток 1×1 с параллельными сторонами (салфетки могут пересекаться). Докажите, что их можно прибить несколькими гвоздями так, чтобы каждую салфетку пронзал ровно один гвоздь.

3. В прямоугольнике 3×4 расположено 6 точек. Докажите, что найдутся две из них, находящиеся на не превосходящем $\sqrt{5}$ расстоянии.

4. В ряд лежит 101 монета. Известно, что среди этих монет 21 фальшивая, причём фальшивые лежат подряд. Также известно что фальшивые монеты весят одинаково и меньше, чем настоящие. За какое минимальное число взвешиваний на обычных чашечных весах можно выявить все фальшивые монеты?

5. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провёл всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведенные прямые содержат все стороны некоторого правильного 2016-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася?

6. Во время игры «Поле чудес» пенсионерка выставила на барабан 9 визуально неразличимых банок с соленьями с весами 1 кг, 2 кг, $\ldots$, 9 кг (именно в таком порядке банки заполнили барабан). После игры барабан остановили и было решено всё это добро определить в музей «Поле чудес». Докажите, что за два взвешивания с помощью двухчашечных весов Якубович сможет однозначно восстановить вес каждой банки.

7. Шахматную доску случайным образом разбили на доминошки. В какое наименьшее число цветов можно гарантированно раскрасить эти доминошки с условием, чтобы любые две клетки доски, отстоящие на ход коня, были раскрашены в разные цвета?