

# Разнобой по геометрии

группа 10-1

09.01.2017

1. Диагонали  $AC$  и  $BD$  параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $S$ . Описанная окружность треугольника  $ASB$  пересекает прямую  $BC$  в точках  $B$  и  $J$ . Докажите, что прямая  $AJ$  касается описанной окружности треугольника  $ASD$ .

*Если умеете, оформите решение с помощью направленных углов.*

2. Окружность, проходящая через вершины  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  и через центр  $I$  вписанной в него окружности, второй раз пересекает прямые  $AB$  и  $AC$  вторично в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что  $BP = CQ$ .
3. Дан параллелограмм  $ABCD$  с тупым углом  $B$ . Прямые  $AD$  и  $CD$  второй раз пересекают окружность  $\omega$ , описанную вокруг треугольника  $ABC$ , в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $DEF$  лежит на окружности  $\omega$ .
4. Вписанная в и невписанная окружности неравнобедренного треугольника  $ABC$  касаются отрезка  $BC$  в точках  $K$  и  $L$ . Пусть  $U$  и  $V$  — основания перпендикуляров, опущенных из вершин  $B$  и  $C$  на биссектрису угла  $A$ . Докажите, что точки  $U$  и  $V$  лежат на окружности, построенной на отрезке  $KL$  как на диаметре.
5. Хорды  $AC$  и  $BD$  окружности  $\omega$  с центром  $O$  пересекаются в точке  $X$ . Описанные окружности треугольников  $ABX$  и  $CDX$  второй раз пересекаются в точке  $Y$ . Докажите, что  $\angle XYO = 90^\circ$ .
6. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Прямая  $\ell$  касается описанных окружностей треугольников  $ABD$  и  $ACD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков  $BD$ ,  $CD$  и  $MN$ , также касается прямой  $\ell$ .
7. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются в точке  $X$ . На окружности  $\omega_1$  отмечены точки  $A$  и  $B$ , а на окружности  $\omega_2$  —  $C$  и  $D$  так, что  $AC$  и  $BD$  — их общие внешние касательные. Прямая  $CX$  пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ , прямая  $AH$  второй раз пересекает окружность  $\omega_2$  в точке  $Q$ . Докажите, что точки  $D$ ,  $P$ ,  $Q$  лежат на одной прямой.
8. В остроугольном неравнобедренном треугольнике  $ABC$  отметили ортоцентр  $H$ , центр описанной окружности  $O$  и провели высоту  $AD$ . Докажите, что образ центра описанной окружности треугольника  $DHO$  при симметрии относительно прямой  $OH$  лежит на средней линии исходного треугольника, параллельной стороне  $BC$ .