Новогодняя алгебра

группа 10-1
08.01.2016

1. Сумма цифр числа n равна 100, а сумма цифр $44n$ равна 800. Найдите сумму цифр $3n$.

2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что уравнение $f(f(x)) = x$ имеет вещественное решение. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет вещественное решение.

3. Действительные числа a, b, c такие, что $abc = 1$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел a, b, c равно единице.

4. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a + b + c \geqslant abc$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \sqrt{3}abc$.

5. Дано несколько квадратный трёхчленов, каждый из которых имеет два вещественных корня. Сумма всех этих трёхчленов равна 0. Докажите, что среди этих трёхчленов найдутся два, разность которых имеет вещественный корень.

6. Одно и то же нечётное число разделили с остатком на каждое из чисел $2, 3, 4, \ldots, 100\,000$. В результате все остатки получились различными, при этом один из них равен нулю. Докажите, что нулевой остаток получился при делении на число, большее $50\,000$.

7. (*Жемчужина листика*) Вещественные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений:
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$$
Докажите, что среди этих чисел найдутся два, разность между которыми не меньше 1.

8. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, n$. За одну операцию разрешается стереть любые два числа одинаковой чётности и записать вместо них их полусумму. Эта операция проделывается до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какое число может получиться в самом конце? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет).

9. Можно ли раскрасить все натуральные числа, большие 2017, в два цвета таким образом, чтобы выполнялись условия: 1) если различные числа x и y раскрашены в один цвет, то и число $x^2 + y$ раскрашено в тот же цвет; 2) чисел каждого цвета бесконечно?

10. Найдите все бесконечные ограниченные последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, при всех натуральных n удовлетворяющие соотношению
$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{\text{НОД}(a_{n+1}, a_n)}.$$