

Новогодняя комбинаторика

группа 10-1

05.01.2017

1. Клетки таблицы 15×15 покрашены в три цвета. Докажите, что можно выбрать некоторый цвет и две строки так, чтобы в них было одинаковое количество клеток этого цвета.
2. За круглым столом сидит 50 человек: 25 девочек и 25 мальчиков. Докажите, что найдётся человек, рядом с которым сидят девочки.
3. В клетчатом квадрате 10×10 отмечены центры всех единичных квадратиков (всего 100 точек). Какое наименьшее число прямых, не параллельных сторонам квадрата, нужно провести, чтобы вычеркнуть все отмеченные точки?
4. У Пети всего 28 одноклассников. У каждых двух из 28 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?
5. Какое наименьшее количество ладей можно расставить на доске 8×8 таким образом, чтобы каждая не занятая ладьёй клетка находилась под боем хотя бы трёх из них? Ладья бьёт клетку, если эта клетка находится с ладьёй в одной вертикали или горизонтали и между ними нет занятых клеток.
6. Дана квадратная таблица 100×100 . Проведено несколько ломаных без самопересечений, не имеющих общих точек, идущих по сторонам клеток. Известно, что ломаные идут строго внутри квадрата, а концами выходят на его границу. Докажите, что существует неугловой узел, который не лежит ни на одной ломаной.
7. На плоскости провели а) 8; б) 12 попарно не параллельных прямых. Какое наибольшее количество равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться?
8. Может ли ладья обойти все клетки доски 10×10 , побывав на каждой клетке ровно по одному разу, чередуя ходы длиной в одну и в две клетки? Считается, что, делая ход длиной в две клетки, ладья не посещает промежуточную клетку.
9. Депутаты Парламента образовали несколько комиссий не более чем из 10 человек каждая. Известно, что для любых одиннадцати комиссий найдётся человек, который входит во все эти комиссии. Докажите, что найдётся человек, который входит во все комиссии.
10. Изначально 99 клеток квадрата 100×100 играют в доту. Если в строке или столбце хотя бы 10 клеток играют в доту, то все клетки этой линии на следующий день начинают играть в доту. Могло ли так случиться, что по прошествии нескольких дней все клетки доски играют в доту?