Новогодняя геометрия

группа 10-1
02.01.2016

1. Серединный перпендикуляр к биссектрисе AL треугольника ABC пересекает прямые BI и CI в точках P и Q (I — центр вписанной окружности). Докажите, что $APIQ$ — вписанный.

2. Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 пересекаются в точке A. Кроме того, ω_1 и ω_2 пересекаются в точке B, ω_1 и ω_3 — в точке C, а ω_2 и ω_3 — в точке D. Касательные к окружности ω_2 в точке B и к окружности ω_3 в точке C пересекаются на окружности ω_1. Докажите, что касательные к окружности ω_2 в точке D и к окружности ω_1 в точке C пересекаются на окружности ω_3.

3. В остроугольном треугольнике ABC середина BC обозначена за A_0. Перпендикуляр, опущенный из середины отрезка BA_0 на сторону AC, пересекает перпендикуляр, опущенный из середины отрезка CA_0 на сторону AB, в точке A'. Аналогично определены точки B' и C'. Докажите, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

4. В угол BAC вписана окружность с центром в точке O (B и C — точки касания). Окружность с центром в A и радиусом AB пересекает окружность с центром O и радиусом OA в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ содержит среднюю линию треугольника ABC.

5. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка X. На сторонах AB и AC отмечены точки P и Q соответственно так, что $BP = BX$ и $CQ = CX$. Перпендикуляры, восстановленные в точках P и Q к сторонам AB и AC соответственно, пересекают друг друга в точке Y. Докажите, что $\angle AIY = 90°$, где I — центр вписанной в треугольник окружности.

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, имеет центр I и касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Лучи AI и CI пересекают прямую A_1C_1 в точках X и Y. Докажите, что B_1I — биссектриса угла XB_1Y.

7. Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Окружность ω_1 касается стороны BC в точке P и продолжений сторон AB, CD за точки B и C. Окружность ω_2 касается стороны AD в точке Q и продолжений сторон AB, CD за точки A и D. Докажите, что отрезок PQ проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

8. Пусть B_0 и C_0 — середины «меньших» друг AC и AB описанной окружности треугольника ABC. Окружность ω_B имеет центр B_0 и касается AC. Окружность ω_C имеет центр C_0 и касается AB. Докажите, что одна из общих внешних касательных к ω_B и ω_C проходит через центр I вписанной в исходный треугольник окружности.

9. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Отражения AB, AC относительно прямых CI, BI соответственно пересекаются в точке K. Докажите, что $KI \perp BC$.

10. Отражения описанной окружности четырёхугольника $ABCD$ относительно сторон AB и AD пересекаются в точках A и A'. Аналогично определены точки B', C', D'. Докажите, что четырёхугольники $ABCD$ и $C'D'A'B'$ равны.