Неравенства однородные и не очень, краткие решения

группа 10-1
15.12.2016

Определение 1. Однородным симметрическим многочленом, порождённым упорядоченным набором вещественных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, называют выражение

$$T(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{a_{\sigma(1)}} \cdot x_2^{a_{\sigma(2)}} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_{\sigma(n)}},$$

где суммирование ведётся по множеству S_n всех перестановок на n элементах.

Примеры: $T(3,2,1) = x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y + x^3z^2y + z^3y^2x + y^3x^2z$; $T(1,1,0) = 2 \cdot (xy + yz + zx)$; $T(1,1,1) = 6xyz$.

Теорема (Мюрхед). *Если $a_i \succ b_i$, то при всех положительных иксах $T(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant T(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.*

0. Для положительных a, b, c докажите неравенство: $a^5 + b^5 + c^5 \geqslant \frac{1}{2} \cdot (a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 + a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3)$.

   Решение. Так как $(5,0,0) \succ (3,2,0)$, то по неравенству Мюрхеда $T(5,0,0) \geqslant T(3,2,0)$, а это оно и есть.

1. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

   Решение. Возведём в шестую степень. Теперь достаточно доказать, что

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3 \geqslant 4 \cdot (abc + bcd + cda + dab)^2.$$

   После раскрытия скобок останется следующее неравенство:

$$\frac{1}{6} \cdot T(6,0,0,0) + \frac{3}{2} \cdot T(4,2,0,0) + T(2,2,2,0) \geqslant 4 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot T(2,2,2,0) + \frac{1}{2} \cdot T(2,2,1,1) \right).$$

   Оно верно, так как суммы коэффициентов перед T одинаковые, а все наборы слева мажорируют наборы справа.

   Комментарий: можно было не раскрывать скобки, а просто прикинуть, какие наборы параметров получаются слева и справа. И так понятно, что минимальный по мажорированию набор слева — это (2, 2, 2, 0), а максимальный справа — тоже (2, 2, 2, 0). Суммы коэффициентов должны получиться одинаковыми, так как при $a = b = c = d$ наблюдается равенство, а значит неравенство, возникающее при раскрытии скобок, может быть получено как линейная комбинация нескольких неравенств Мюрхеда.

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите:

$$a + b + c \geqslant ab + bc + ca.$$

   Решение. Сделаем замену $a = a'/\lambda, b = b'/\lambda, c = c'/\lambda$. Получим следующую задачу (далее штрихи не пишем).

   Положительные числа a, b, c, λ таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3\lambda^2$. Докажите: $\lambda \cdot (a + b + c) \geqslant ab + bc + ca$.

   Выразим λ из связки и подставим в желаемое неравенство. Докажем, что при всех положительных a, b, c верно:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \cdot (a + b + c) \geqslant (ab + bc + ca).$$

   После возведения в квадрат получим $(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (a + b + c)^2 \geqslant 3 \cdot (ab + bc + ca)^2$. Раскроем скобки:

$$\frac{1}{2} \cdot T(4,0,0) + T(2,2,0) + 2 \cdot T(3,1,0) + T(2,1,1) \geqslant \frac{3}{2} \cdot T(2,2,0) + 3 \cdot T(2,1,1).$$

   Чтобы получить последнее, достаточно сложить несколько неравенств Мюрхеда и равенств, а именно:

$$\frac{1}{2} \cdot T(4,0,0) \geqslant \frac{1}{2} \cdot T(2,2,0);\ T(2,2,0) = T(2,2,0);\ 2 \cdot T(3,1,0) \geqslant 2 \cdot T(2,1,1);\ T(2,1,1) = T(2,1,1).$$

3. Для положительных a, b, c известно, что $\frac{3}{abc} \geqslant a + b + c$. Покажите, что выполнено неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant a + b + c.$$

Решение. После *гомогенизации* (замены из решения предыдущей задачи) получим вот что:

Для положительных a, b, c, λ известно, что $3\cdot\lambda^4 \geqslant (a+b+c)\cdot abc$. Покажите, что $\lambda^2\cdot(ab+bc+ca) \geqslant (a+b+c)\cdot abc$.

В общем, достаточно для положительных a, b, c доказать неравенство:

$$(ab+bc+ca)\cdot\sqrt{\frac{(a+b+c)\cdot abc}{3}} \geqslant (a+b+c)\cdot abc.$$

Возведём в квадрат, сократим, перепишем: $(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc\cdot(a+b+c)$. После раскрытия скобок очевидно.

4. Для положительных a, b, c верно, что $a+b+c = ab+bc+ca$, докажите, что

$$a+b+c+1 \geqslant 4abc.$$

Решение. Как и в двух предыдущих задачах, гомогенизируем исходное неравенство и связку.

Для положительных a, b, c, λ верно, что $\lambda\cdot(a+b+c) = ab+bc+ca$. Докажите, что $\lambda^2(a+b+c)+\lambda^3 \geqslant 4abc$.

Подставим λ из связки в неравенство и домножим на $(a+b+c)^3$. Получим что-то вроде

$$(ab+bc+ca)^2(a+b+c)^2 + (ab+bc+ca)^3 \geqslant 4abc\cdot(a+b+c)^3.$$

Вынесем общий множитель в левой части и по-тихому начнём раскрывать скобки:

$$\Big((a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2(a^2bc+b^2ca+c^2ab)\Big)\cdot\Big((a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)\Big) \geqslant$$
$$\geqslant 4abc\cdot\Big(\frac{1}{2}\cdot T(3,0,0)+3\cdot T(2,1,0)+T(1,1,1)\Big).$$

Соберём остатки воли в кулак и дораскроем:

$$\Big(T(4,2,0)+\frac{1}{2}\cdot T(2,2,2)\Big)+\Big(T(4,1,1)+2\cdot T(3,2,1)\Big)+\Big(\frac{3}{2}\cdot T(3,3,0)+3\cdot T(3,2,1)\Big)+\Big(3\cdot T(2,2,2)+6\cdot T(3,2,1)\Big) \geqslant$$
$$\geqslant 2\cdot T(4,1,1)+12\cdot T(3,2,1)+4\cdot T(2,2,2).$$

Наконец, приведём подобные:

$$T(4,2,0)+\frac{3}{2}\cdot T(3,3,0)+ \geqslant T(4,1,1)+T(3,2,1)+\frac{1}{2}\cdot T(2,2,2).$$

Последнее следует из неравенств Мюрхеда для наборов $(4,2,0)\succ(4,1,1)$ и $(3,3,0)\succ(3,2,1)\succ(2,2,2)$.

5. Для положительных a, b, c, d верно, что $\big(a^3+b^3\big)^4 = c^3+d^3$. Докажите неравенство:

$$a^4c+b^4d \geqslant cd.$$

Решение. После гомогенизации связка станет $(a^3+b^3)^4 = (c^3+d^3)\cdot\lambda^9$, а доказать нужно будет $a^4c+b^4d \geqslant cd\cdot\lambda^3$.

Дабы прояснить истинную сущность задачи, снова подставим λ из связки в неравенство (и поделим на cd):

$$\left(\frac{a^4}{d}+\frac{b^4}{c}\right)\cdot(c^3+d^3)^{1/3} \geqslant (a^3+b^3)^{4/3}.$$

И ещё возведём обе части в степень $3/4$, получим:

$$\left(\frac{a^4}{d}+\frac{b^4}{c}\right)^{3/4}\cdot(c^3+d^3)^{1/4} \geqslant a^3+b^3.$$

Последнее неравенство следует из *неравенства Гёльдера*. Приведём, кстати, его полную формулировку.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — положительны. Пусть также даны такие положительные числа p и q, что $1/p+1/q = 1$. Тогда выполнено неравенство $(x_1^p+\ldots+x_n^p)^{1/p}\cdot(y_1^q+\ldots+y_n^q)^{1/q} \geqslant x_1y_1+\ldots+x_ny_n$.

Достаточно подставить $p = 4/3, q = 4, x_1 = \dfrac{a^3}{d^{3/4}}, x_2 = \dfrac{b^3}{c^{3/4}}, y_1 = d^{3/4}, y_2 = c^{3/4}$.

6. Известно, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$, числа положительны. Покажите, что

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\leqslant\frac{3}{16}.$$

Решение. После гомогенизации получим однородное неравенство

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\leqslant\frac{3}{16}\cdot\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)\cdot abc}.$$

Навесим на него более удобную связку (в силу однородности так можно делать): пусть $a+b+c=1$. Наше неравенство перепишется в более простом виде:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\leqslant\frac{3}{16}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Для любого $x\in(0,1]$ справедлива оценка

$$\frac{1}{(1+x)^2}\leqslant\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right),$$

так как после домножения на всё, что подаёт признаки жизни, получится $(1-3x)^2\geqslant 0$.

Кроме того, уместно вспомнить о следующем неравенстве для положительных чисел a и b: $\dfrac{4}{a+b}\leqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

А теперь берём и пишем:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}&\leqslant\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{1-c}\right)=\\
&=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b}\right)\leqslant\\
&\leqslant\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)=\frac{3}{16}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).
\end{aligned}$$