Неравенства однородные и не очень

группа 10-1
15.12.2016

Определение 1. Однородным симметрическим многочленом, порождённым упорядоченным набором вещественных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, называют выражение

$$T(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{a_{\sigma(1)}} \cdot x_2^{a_{\sigma(2)}} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_{\sigma(n)}},$$

где суммирование ведётся по множеству S_n всех перестановок на n элементах.

Примеры: $T(3,2,1) = x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y + x^3z^2y + z^3y^2x + y^3x^2z$; $T(1,1,0) = 2 \cdot (xy + yz + zx)$; $T(1,1,1) = 6xyz$.

Определение 2. Набор a_i вещественных чисел *мажорирует* набор b_i (оба набора состоят из n чисел), если выполнена система из неравенств и одного равенства (запись $a_i \succ b_i$):

$$\begin{gathered} a_1 \geqslant b_1; \\ a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2; \\ a_1 + a_2 + a_3 \geqslant b_1 + b_2 + b_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 + \ldots + a_{n-1} \geqslant b_1 + \ldots + b_{n-1}; \\ a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n. \end{gathered}$$

Теорема (Мюрхед)**.** *Если $a_i \succ b_i$, то при всех положительных иксах $T(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant T(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.*

Бесполезные рекомендация: T-обозначения юзабельны; используйте их, когда приходится раскрывать страшные скобки. Пример: $(a+b+c)^3 = \frac{1}{2} \cdot T(3,0,0) + 3 \cdot T(2,1,0) + T(1,1,1)$. Для проверки вычислений подставляйте $a = b = c = 1$: $(1+1+1)^3 = \frac{1}{2} \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 6$. Если исходное неравенство не однородное (или связка), хорошо помогает подстановка вместо всех переменных $a = a'/t$, а затем выражение t в неравенстве и в связке.

0. Для положительных a, b, c докажите неравенство: $a^5 + b^5 + c^5 \geqslant \frac{1}{2} \cdot (a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 + a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3)$.

1. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство:
$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите:
$$a + b + c \geqslant ab + bc + ca.$$

3. Для положительных a, b, c известно, что $\frac{3}{abc} \geqslant a + b + c$. Покажите, что выполнено неравенство
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant a + b + c.$$

4. Для положительных a, b, c верно, что $a + b + c = ab + bc + ca$, докажите, что
$$a + b + c + 1 \geqslant 4abc.$$

5. Для положительных a, b, c, d верно, что $\left(a^3 + b^3\right)^4 = c^3 + d^3$. Докажите неравенство:
$$a^4c + b^4d \geqslant cd.$$

6. Известно, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$, числа положительны. Покажите, что
$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leqslant \frac{3}{16}.$$