

Неравенства

группа 10-1

08.12.2016

1. Для любых положительных a, b, c докажите неравенство: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$.

2. Неотрицательные a, b, c таковы, что $a + b + c = 2$. Докажите неравенство:

$$abc \geq 8(1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

3. Пусть a, b, c положительны. Докажите, что $a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3 \geq a^2b^2c^2(a + b + c)$.

4. Известно, что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Покажите, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z$.

5. Положительные x, y, z таковы, что $xyz = 1$. Докажите неравенство:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

6. (Неравенство Гёльдера) Для неотрицательных чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ докажите справедливость неравенства:

$$(a_1^3 + \dots + a_n^3) (b_1^3 + \dots + b_n^3) (c_1^3 + \dots + c_n^3) \geq (a_1b_1c_1 + \dots + a_nb_nc_n)^3.$$

Сформулируйте его для остальных степеней.

7. (ИМО 2012) Неотрицательные a_2, a_3, \dots, a_n таковы, что $a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Докажите неравенство:

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > n^n.$$

8. (Япония 2010) Пусть x, y, z положительны; докажите, что

$$\frac{1 + zx + zy}{(1 + x + y)^2} + \frac{1 + yx + yz}{(1 + x + z)^2} + \frac{1 + xy + xz}{(1 + y + z)^2} \geq 1.$$