Неравенства, краткие решения.

группа 10-1
05.12.2016

1. Пусть x, y, z — неотрицательные числа. Докажите неравенство
$$xy + yz + xz \geqslant x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}.$$
Решение. Сделаем замену $a = \sqrt{xy}, b = \sqrt{yz}, c = \sqrt{zx}$. Получим, что достаточно доказать неравенство $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$, которое есть полусумма трёх неравенств типа $a^2+b^2 \geqslant 2ab$.

2. Пусть a, b, c — действительные числа. Докажите неравенство
$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geqslant ab - ac + 2bc.$$
Решение. Достаточно раскрыть скобки в $\left(\frac{a}{2} - b + c\right)^2 \geqslant 0$.

3. Пусть x, y — положительные числа. Докажите неравенство
$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy}.$$
Решение. Так как $x^4+y^2 \geqslant 2x^2y > 0$, то $\frac{x}{x^4+y^2} \leqslant \frac{x}{2x^2y} = \frac{1}{2xy}$. Аналогично, $\frac{y}{y^4+x^2} \leqslant \frac{1}{2xy}$. Суммируя последние два неравенства, получаем требуемое.

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ac \geqslant a + b + c$. Докажите, что $a + b + c \geqslant 3$.
Решение. В задаче 1 мы показали, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. Поэтому
$$(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca) \geqslant 3(a + b + c).$$
Деля неравенство на $a + b + c$, завершаем доказательство.

5. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство
$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geqslant 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$
Решение. Как было показано в задаче 1, неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ можно получить после суммирования неравенств вида $\frac{a^4+b^4}{2} - a^2b^2 \geqslant 0$. Усилим эти неравенства, используя тот факт, что a, b, c — длины сторон треугольника. Имеем
$$\frac{a^4 + b^4}{2} - a^2b^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{2} = \frac{(a - b)^2(a + b)^2}{2} \geqslant \frac{(a - b)^2c^2}{2} = \frac{a^2c^2}{2} + \frac{b^2c^2}{2} - abc^2.$$
Сложим три таких неравенства, получим требуемое.

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a + b + c = 3$. Докажите неравенство
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ac.$$
Решение 1. Добавим к обеим частям удвоенного исходного неравенства $a^2 + b^2 + c^2$, получим
$$a^2 + 2\sqrt{a} + b^2 + 2\sqrt{b} + c^2 + 2\sqrt{c} \geqslant (a + b + c)^2 = 9.$$
Последнее есть результат сложения трёх неравенств типа $a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a} \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = 3a$.

Решение 2. Достаточно доказать, что $\sqrt{a} \geqslant \frac{ab+ac}{2}$ (сложим три такие штуки и получим ровно то, что от нас хотят). Раз $b + c = 3 - a$, то после замены $x = \sqrt{a}$ нам лишь останется при всех $x \in [0, \sqrt{3}]$ убедиться в справедливости неравенства $x(3 - x^2) \leqslant 2$.

Если $f(x) = x(3 - x^2)$, то $f'(x) = 3 - 3x^2$, и максимум функции достигается при $x = 1$; но даже в точке $x = 1$ выполнено $f(x) = f(1) = 2 \leqslant 2$.

Для тех, кто не может производные, есть альтернативное объяснение. По неравенству о средних

$$\frac{x^3 + 1 + 1}{3} \geqslant \sqrt[3]{x^3}, \text{ а значит } x(3 - x^2) \leqslant 2.$$

Комментарий. Может оказаться так, что неравенство является суммой каких-то более простых неравенств. Можно попробовать поискать эти неравенства; например, если нужно доказать некоторое симметричное неравенство, можно попробовать поискать более простые неравенства исходя из каких-нибудь соображений симметрии.

7. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a + b + c = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

Решение. Докажем, что $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} \geqslant \frac{4}{1+c}$, тогда мы решим задачу, если сложим это неравенство с аналогичными. После замены $x = b + c, y = a + c, z = a + b$ останется неравенство

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{x+y},$$

которое напрямую следует из арифметического-гармонического, из КБШ для дробей, из Йенсена для $f(x) = 1/x$ или из тупого раскрытия скобок.