

Неравенства

группа 10-1

05.12.2016

1. Пусть x, y, z — неотрицательные числа. Докажите неравенство

$$xy + yz + xz \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}.$$

2. Пусть a, b, c — действительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc.$$

3. Пусть x, y — положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ac \geq a + b + c$. Докажите, что $a + b + c \geq 3$.

5. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a + b + c = 3$. Докажите неравенство

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac.$$

7. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a + b + c = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$