Облегчённый разнобой по геометрии, краткие решения

группа 10-1

01.12.2016

1. Серединные перпендикуляры к диагоналям AC и BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекают сторону AD в точках X и Y соответственно. Докажите, что середина отрезка BC равноудалена от прямых BY и CX.

   Решение. Унизительный счёт в направленных углах. Достаточно доказать, что $\angle YBC = \angle BCX$, тогда утверждение задачи будет следовать из симметрии относительно серпера к BC. Дальше используем вписанность $ABCD$ и равнобедренность AXC и BYD: $\angle YBC = \angle YBD + \angle DBC = \angle BDY + \angle DAC = \angle BDA + \angle XAC = \angle BCA + \angle ACX = \angle BCX$, всё.

2. Дан остроугольный треугольник ABC. Точка X плоскости определена посредством соотношений $\angle(BC, BA) = \angle(BA, BX)$ и $\angle(CB, CA) = \angle(CA, CX)$ (*речь идёт о направленных углах между прямыми*). Докажите, что прямая AX проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

   Решение 1. Заметим, что A — центр вневписанной (или вписанной) окружности треугольника BXC. Из леммы о трезубце относительно треугольника BXC следует, что центр окружности ABC — это середина одной из дуг BC окружности BXC, и тогда этот центр лежит на биссектрисе XA угла BXC.

   Решение 2. Точка Y, изогонально сопряжённая точке X относительно треугольника ABC, есть просто отражённая относительно BC вершина A. Получили, что AY — направление на высоту в ABC, а значит AX — направление на центр описанной окружности.

3. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Касательная к ω, восстановленная в вершине B, пересекает, прямую, проходящую через O и параллельную AB, в точке P. Касательная к ω, восстановленная в вершине C, пересекает, прямую, проходящую через O и параллельную AC, в точке Q. Докажите, что прямая PQ касается ω.

   Решение 1. Рассмотрим полярные соответствия относительно ω. Достаточно доказать, что полюс прямой PQ лежит на ω. Полюс PQ — это пересечение поляр p и q точек P и Q. Поляра p точки P проходит через B и перпендикулярна OP (а значит и AB). Получили условия $B \in p$, $p \perp AB$, аналогично с q. Но тогда p и q проходят через A', где AA' — диаметр ω.

   Решение 2. Точку A' определим как в решении выше. Пусть P' и Q' — точки пересечения касательной к A' с касательными к B и к C соответственно. Тогда OP' делит BA' пополам из симметрии, и OP' параллельна AB как средняя линия в треугольнике AAB. Значит, $P = P'$, (аналогично) $Q = Q'$, и PQ касается ω в точке A'.

   Комментарий: в задачах, где надо доказать касание (в особенности двух окружностей), зачастую приходится угадывать точку касания.

4. Точка X диаметрально противоположна точке касания вписанной окружности ω треугольника ABC со стороной BC. Прямые BX и CX вторично пересекают ω в точках P, Q. Касательные к окружности ω, восстановленные в точках P и Q, пересекаются в Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину BC.

   Решение 1. Нужно доказать, что симедиана треугольника PXQ служит медианой в треугольнике BXC, то есть что прямые PQ и BC антипараллельны относительно угла BXC; короче, достаточно доказать вписанность $BPQC$. Пусть ω касается BC в точке Z. Посчитаем уголки: $\angle ZCX + \angle ZXC = 90^\circ \Rightarrow \angle BCQ + \angle ZPQ = 90^\circ \Rightarrow \angle BCQ + (\angle ZPQ + 90^\circ) = 180^\circ \Rightarrow \angle BCQ + \angle BPQ = 180^\circ$, доказано ($\angle BPZ = 90^\circ$, так как дополнительный угол опирается на диаметр).

Решение 2. Спроецируем гармоническую четвёрку B, C, середину M отрезка BC и бесконечность прямой BC на ω из точки X. Получится четвёрка точке P, Q, некоторая точка N на ω и точка X (так как касательная к ω в X параллельна BC). Прямая XN проходит через Y по свойству гармонического четырёхугольника.

5. На продолжении стороны BC треугольника ABC отмечены точки P и Q с условием, что $AP = AQ = p$, где p — полупериметр треугольника. Докажите, что описанная окружность треугольника APQ касается вневписанной окружности треугольника ABC.

   Решение. Сделаем инверсию с центром в A и радиусом p. Вневписаная окружность останется на месте (длины отрезков касательной из точки A до неё как раз равны p), точки P и Q — тоже. Тогда окружность APQ перейдёт в прямую $PQ = BC$, которая касается вневписанной окружности. Значит, касание было и до инверсии.

6. Пусть A_0 — середина дуги BAC описанной окружности ω треугольника ABC, X — пересечение прямых A_0C и AB, Y — пересечение биссектрисы угла BAC с касательной к ω, восстановленной в вершине C. Докажите, что прямая XY делит отрезок BC пополам.

   Решение. Пусть A_0A_1 — диаметр ω. Задача следует из теоремы Паскаля для AA_1A_0CCB.

7. Биссектрисы углов B, C треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают среднюю линию, параллельную BC, в точках X, Y соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника XIY лежит на прямой BC.

   Решение. Пусть вписанная окружность касается сторон треугольника в точках A_1, B_1, C_1. По *лемме о проекции вершины на биссектрису* прямые BI, A_1B_1 и средняя линия, параллельная BC, пересекаются в одной точке (в X). Аналогично, Y лежит на A_1C_1. Теперь стало очевидным, что A_1 — ортоцентр XIY ($XI = BI \perp A_1C_1 = XA_1$, и так же с другой стороны, речь о прямых).

   Листочек с леммой о проекции вершины на биссектрису можно найти в материалах группы геом-9 кружка 2015-2016.