Облегчённый разнобой по геометрии

группа 10-1
01.12.2016

Задачи упорядочены случайно, а не как обычно, по сложности.

1. Серединные перпендикуляры к диагоналям AC и BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекают сторону AD в точках X и Y соответственно. Докажите, что середина отрезка BC равноудалена от прямых BY и CX.

2. Дан остроугольный треугольник ABC. Точка X плоскости определена посредством соотношений $\angle(BC, BA) = \angle(BA, BX)$ и $\angle(CB, CA) = \angle(CA, CX)$ (*речь идёт о направленных углах между прямыми*). Докажите, что прямая AX проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

3. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Касательная к ω, восстановленная в вершине B, пересекает, прямую, проходящую через O и параллельную AB, в точке P. Касательная к ω, восстановленная в вершине C, пересекает, прямую, проходящую через O и параллельную AC, в точке Q. Докажите, что прямая PQ касается ω.

4. Точка X диаметрально противоположна точке касания вписанной окружности ω треугольника ABC со стороной BC. Прямые BX и CX вторично пересекают ω в точках P, Q. Касательные к окружности ω, восстановленные в точках P и Q, пересекаются в Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину BC.

5. На продолжении стороны BC треугольника ABC отмечены точки P и Q с условием, что $AP = AQ = p$, где p — полупериметр треугольника. Докажите, что описанная окружность треугольника APQ касается вневписанной окружности треугольника ABC.

6. Пусть A_0 — середина дуги BAC описанной окружности ω треугольника ABC, X — пересечение прямых A_0C и AB, Y — пересечение биссектрисы угла BAC с касательной к ω, восстановленной в вершине C. Докажите, что прямая XY делит отрезок BC пополам.

7. Биссектрисы углов B, C треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают среднюю линию, параллельную BC, в точках X, Y соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника XIY лежит на прямой BC.