Оценочные задачи, краткие решения

группа 10-1
28.11.2016

1. Шахматная фигура «пулеметчик» бьёт все клетки в одном из четырёх направлений. Какое максимальное число не бьющих друг друга пулемётчиков можно выставить на доске 20×20?

   Решение. Ответ: 76.

   Пример. Всех разместить на границе лицом к стенке, как раз 76 клеток.

   Оценка. Пусть существует какая-то расстановка не бьющих друг друга пулемётчиков. Выполним последовательно две операции: 1) повернём всех пулемётчиков на границе лицом к границе; 2) всех пулемётчиков не на границе один за одним будем перемещать вперёд по направлению стрельбы до упора. Легко проверить, что пулемётчики в процессе выполнения операция никогда не бьют друг друга и не сталкиваются друг с другом. В конце все пулемётчики будут загнаны в граничную рамку, а значит их количество не превосходит 76.

2. Определите минимальное значение параметра k, обладающего следующим свойством: существует способ отметить k клеток внутри квадрата 100×100 так, чтобы при любом разбиении его на два прямоугольника в одном из прямоугольников было не менее 100 клеток.

   Решение. Ответ: 133.

   Оценка. Предположим, что существует пример с $k \leqslant 132$ клетками. Будем дискретно-непрерывно перемещать слева направо линию вертикального разреза. Изначально не менее 100 клеток были по правую руку от разреза, в конце станут по левую, а значит в некоторый момент ответ на вопрос «с какой именно стороны не менее 100 клеток» поменяется, т. е. различен для некоторых двух вертикальных разрезов. Столбец между этими разрезами будем называть *главным*, пусть в нём x клеток отмечено. Тогда слева от него не менее $100 - x$ клеток, и справа тоже. Получили, что количество клеток k в таблице оценивается $2(100 - x) + x = 200 - x \leqslant k \leqslant 132$, т. е. $x \geqslant 68$. Аналогичным образом, количество клеток y в главной строке удовлетворяет $y \geqslant 68$. Но главные строка и столбец пересекаются всего по одной клетке, поэтому верна оценка $132 \geqslant k \geqslant x + y - 1 \geqslant 2 \cdot 68 - 1 = 135$, противоречие.

   Пример. Крест (объединение строки и столбца длины 67, пересекающихся ровно по одной центральной клетке).

3. В городе Прямоугольницке схема улиц представляет из себя прямоугольную сетку $m \times n$. На некоторых улицах (но не на перекрёстках) стоят полицейские и записывают в блокнотик направление и момент времени проезжающих мимо машин. Какое минимальное число полицейских должно стоять на улицах города, чтобы можно было однозначно восстановить любой замкнутый маршрут и направление движения автомобиля (машина не ездит по одной улице дважды)?

   Решение. Ответ: mn.

   Оценка. Рассмотрим граф с вершинами в узлах сетки, рёбрам которого соответствуют улицы без полицейских. В нём не должно быть циклов, иначе машина может ездить по циклу и мы не сможем угадать направление движения. Значит, этот граф не более чем дерево.

   Пример. Любое дерево подойдёт, так как между любыми двумя его вершинами существует единственный простой путь, а значит все отрезки пути между полицейскими восстанавливаются однозначно.

4. Какое максимальное количество клеток доски $m \times n$ можно закрасить так, чтобы никакие три центра закрашенных клеток не образовывали прямоугольный треугольник?

Решения. Ответ: $\max(m+n-2, m, n)$. Пример для всех решений один и тот же: при $m, n \geqslant 2$ закрашиваем все клетки в самой верхней строке и в самом левом столбце, кроме клетки их пересечения. Если m или n равно 1, то закрашиваем всё.

Оценка 1. Заметим, что для каждой закрашенной клетки либо в её строке, либо в её столбце больше нет закрашенных клеток; сопоставим клетке эту строку/столбец. Получили инъективное отображение из множества закрашенных клеток в множество строк и столбцов. Если это отображение накрывает все строки, то во всех строках не более одной закрашенной клетки и тогда закрашенных клеток не более $m \leqslant \max(m+n-2, m, n)$. Аналогично со столбцами. Остаётся случай, когда отображение накрыло не все строки и не все столбцы, но тогда из инъективности закрашенных клеток не более $m-1+n-1 \leqslant \max(m+n-2, m, n)$.

Оценка 2. Докажем по индукции (по параметру $m+n$) следующее `утверждение:` *если на доске $m \times n$ закрашено k клеток и при этом не существует прямоугольного треугольника с горизонтальным и вертикальным катетами с вершинами в центрах закрашенных клеток, то выполнено неравенство $k \leqslant \max(m+n-2, m, n)$.*

`База:` $m = 1$, n — любое (или наоборот); очевидна.

Заметим, что при всех $m, n \geqslant 1$, выполнено неравенство $\max(m+n-2, m, n) \leqslant m+n-1$.

`Переход:` $m, n \geqslant 2$ (иначе мы в базе). Найдём строку, в которой закрашены хотя бы две клетки (если такой нет, то $k \leqslant m \leqslant \max(m+n-2, m, n)$). Пусть в ней закрашено x клеток. В столбцах, содержащих эти x клеток, больше ничего нет. Если $x = n$, то всего в таблице закрашено $k = n \leqslant \max(m+n-2, m, n)$ клеток, победа. Если же $x < n$, то выкинем рассматриваемую строку и x столбцов, содержащих закрашенные клетки этой строки. В оставшейся подтаблице выполнено предположение индукции, поэтому число k' закрашенных клеток в ней удовлетворяет $k' \leqslant \max(m-1+n-x-2, m-1, n-x) \leqslant m+n-x-2$. Но тогда $k = k'+x \leqslant m+n-2 \leqslant \max(m+n-2, m, n)$. Всё.

Оценка 3. Как и в предыдущих решениях, ограничимся лишь треугольниками с горизонтальными и вертикальными катетами. Посмотрим на таблицу как на двудольный граф строк и столбцов (ребро соответствует закрашенной клетке). Запрет на прямоугольные треугольники из исходной задачи выльется в запрет простых путей длины 3 в графе. А любой граф без путей длины 3 и треугольников (их нет из-за двудольности) есть объединение звёзд (легко доказывается руками). Внутри каждой звезды ребёр на 1 меньше, чем вершин, и при $m, n \geqslant 2$ нужно хотя бы две звезды; т. е. можно организовать не более $m+n-2$ ребра. При $m = 1$ или $n = 1$ можно обойтись одной звездой и получить n или m проведённых рёбер.

5. Найдите максимальное вещественное число L со следующим свойством: для любого покрытия отрезка I длины 1 конечным множеством отрезков можно из этого множества выделить такое подмножество, что мера точек I, покрытых ровно в один слой, не меньше L (подмножество не обязано покрывать весь отрезок).

   Решение. Ответ: $L = 2/3$.

   Оценка. Для покрытия $\{[0, 2/3], [1/3, 1]\}$ отрезка $[0, 1]$ константа неулучшаема.

   Пример. Докажем теперь, что из любого покрытия можно выделить требуемое подмножество.

   Для начала обрежем отрезки, чтобы они не выходили за границы исходного $[0, 1]$. Далее, из нашего покрытия выделим какое-нибудь минимальное по включению подпокрытие (это можно сделать, последовательно удаляя отрезки, содержащиеся в объединении остальных). Упорядочим все оставшиеся отрезки по левому концу. Заметим, что они при этом упорядочатся и по правому концу (иначе какой-то отрезок будет целиком лежать внутри другого, что противоречит минимальности подпокрытия). В соответствии с этим упорядочиванием пронумеруем отрезки. Помогите, меня держат в тёмном холодном подвале и заставляют писать эти решения.

Докажем, что отрезки с нечётными номерами попарно не пересекаются: предположим противное, пусть два нечётных отрезка пересеклись, тогда чётный отрезок между ними содержится в их объединении в силу принципа упорядочивания, противоречие с минимальностью подпокрытия. Аналогично, чётные отрезки тоже не пересекаются. Обозначим объединение нечётных отрезков за N, а объединение чётных — за M. Если длина N хотя бы $2/3$, то в качестве искомого подмножества можно взять само N. Аналогично с M. Но если длины N и M меньше $2/3$, а вместе они покрывают $[0,1]$, то длина их пересечения $N \cap M$ меньше $1/3$, а значит больше $2/3$ множества покрыто ровно в один слой, т. е. $N \cup M$ — искомое подмножество.

6. Дан прямоугольник. Провели $m-1$ горизонтальных разрезов и $n-1$ вертикальных, изначальный прямоугольник разрезался на mn прямоугольников. На каждый из этих mn прямоугольников положили карточку с написанной на ней площадью этого маленького прямоугольника числом вниз. Какое минимальное число карточек нужно перевернуть, чтобы узнать площадь изначального прямоугольника?

   Решение. Ответ: $n+m-1$.

   Заведём двудольный граф строк-столбцов, рёбрам будут соответствовать перевёрнутые карточки. Переформулируем задачу в терминах графа: каждой вершинке соответствует скрытое от нас число (толщина соответствующей строки или столбца), нам известны произведения на концах проведённых рёбер, требуется узнать значение произведение сумм чисел в долях, при этом минимизировав количество проведённых рёбер.

   Оценка. Если этот граф не связен, то можно выделить одну его компоненту связности, умножить на случайную константу λ числа в одной её доле и поделить на эту же константу числа в другой её доле. Тогда числа на рёбрах не поменяются, а суммарная площадь почти наверное изменится (её зависимость от λ имеет вид $(A+B\cdot\lambda)(C+D/\lambda)$), т. е. информации для восстановления полной площади не хватило. Таким образом, проведённые рёбра должны как минимум обеспечивать связность графа; следовательно, их не меньше $m+n-1$ (столько в дереве).

   Пример. Подойдёт любое дерево. Если число в некоторой вершинке обозначить за x, то все остальные числа в вершинах восстанавливаются однозначно, причём в одной доле все числа в вершинах будут вида $c \cdot x$, а в другой — c/x, и суммарная площадь не будет зависеть от x.

7. На плоскости проведено $2n+1$ прямых общего положения. Каково максимальное число остроугольных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых?

   Решение. Ответ: $n(n+1)(2n+1)/6$.

   Для удобства перенесём все прямые параллельно так, чтобы они проходили через одну точку. Через эту точку проведём окружность, каждая прямая вторично пересечёт эту окружность в некоторой точке. Получили $2n+1$ точку на окружности. Теперь читателю предлагается самостоятельно осознать, что остроугольность треугольника, составленного из трёх прямых из условия, эквивалентна остроугольности треугольника из трёх соответствующих точек на окружности. Решать будем эквивалентную задачу: есть $2n+1$ точка на окружности, найти максимум числа остроугольных треугольников с вершинами в этих точках.

   Оценка. Пусть a остроугольных треугольников и b тупоугольных. Несомненно $a+b=C_{2n+1}^3$. Посчитаем вероятность p того, что при случайном выборе упорядоченной тройки точек (A,B,C), центр O окружности лежит внутри угла BAC (такую тройку точек будем называть *подходящей*). С одной стороны,

$$p = \frac{6a}{(2n+1)\cdot 2n \cdot (2n-1)} + \frac{2b}{(2n+1)\cdot 2n \cdot (2n-1)},$$

   так как по сути мы сначала случайно выбираем треугольник, а затем случайно упорядочиваем его вершины. В остроугольном треугольнике при любом упорядочивании O попадает внутрь угла, в тупоугольном — лишь при двух упорядочиваниях из шести.

Оценим p из других соображений. Пусть при фиксированной вершине A по одну сторону от прямой AO ровно k точек, а по другую — $2n-k$. Тогда число подходящих троек с фиксированной вершиной A равно $2 \cdot k(2n-k)$ и при всех k оценивается сверху константой $2n^2$. Просуммировав эти одинаковые оценки по всем фиксированным вершинам, получим

$$p \leqslant \frac{(2n+1) \cdot 2n^2}{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)}.$$

Сопоставляя только что полученную оценку для p с точной формулой p, полученной выше, имеем:

$$p = \frac{6a}{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)} + \frac{2b}{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)} \leqslant \frac{(2n+1) \cdot 2n^2}{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)}.$$

Получили систему из двух соотношений на a и b:

$$a + b = C_{2n+1}^3 \text{ и } 3a + b \leqslant (2n+1) \cdot n^2.$$

Вычтем второе соотношение из первого (одно из них равенство, так можно):

$$2a \leqslant (2n+1) \cdot \frac{6n^2 - 2n \cdot (2n-1)}{6} = (2n+1) \cdot \frac{2n^2 + 2n}{6}, \text{т. е.} a \leqslant \frac{(2n+1) \cdot (n+1) \cdot n}{6}.$$

Пример. Правильный $(2n+1)$-угольник, так как неравенство на p в оценке обратится в равенство, и последнее соотношение на a станет равенством.