Разнобой по геометрии, краткие решения

группа 10-1

24.11.2016

1. Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

   Решение. По лемме о трезубце точки A и I симметричны относительно прямой, соединяющей середины дугу, т. е. относительно PQ. Уже можно сделать вывод, что $APIQ$ — дельтоид. Но AI — биссектриса PAQ, а значит $APIQ$ — ромб.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается его сторон BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. На продолжении отрезка AA_1 за точку A отмечена такая точка X, что $AX = AB_1 = AC_1$. Прямые XB_1 и XC_1 вторично пересекают ω в точках P и Q. Докажите, что PQ — диаметр ω.

   Решение 1. Посчитаем уголки. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, тогда $\angle B_1XC_1 = \alpha$ (вписанный вдвое меньше центрального). Кроме того, $\angle B_1IC_1 = \pi - 2\alpha$. Вычислим $\angle B_1XC_1$ вторым способом (через полуразность высекаемых им дуг):

   $$\alpha = \angle B_1XC_1 = \frac{1}{2}(PQ - B_1C_1) = \frac{1}{2}PQ - \pi/2 + \alpha \Rightarrow PQ \text{ — диаметр.}$$

   Решение 2. Сделаем инверсию с центром в X, переводящую ω в себя. При этой инверсии прямая PQ перейдёт в окружность XB_1C_1, которая ортогональна ω, так как её радиус AB_1 касается ω в точке B_1. Значит, до инверсии $PQ \perp \omega$, т. е. PQ — диаметр.

   Комментарий. В качестве лейтмотива этого листика можно выделить следующее наблюдение: действие инверсии на инвариантной относительно этой инверсии окружности совпадает с проекцией с окружности на себя из центра инверсии! В некоторых задачах отдельные точки строятся как образы при проекции с окружности на себя. Если эту проекцию продолжить до инверсии всей плоскости, можно увидеть много интересного.

3. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

   Решение 1. Заметим, что описанная окружность треугольника OKL касается прямой OA (посчитайте уголочки самостоятельно). Радикальная ось KL окружностей OKL и ABC делит пополам отрезок OA общей касательной, что и требовалось доказать.

   Решение 2. Осуществим инверсию с центром в O, переводящую окружность в себя. Середина OA при этом перейдёт в такую точку D на прямой OA, что $OA = AD$. Точки K и L перейдут в точки B и C. Заметим, что $ABCD$ (в правильно порядке) — равнобокая трапеция, и её вершины лежат на одной окружности. Но тогда до инверсии точки K, L и середина OA лежали на одной прямой.

   Решение 3. Пусть AD — диаметр окружности, прямая OD вторично пересекает окружность в точке S. Тогда четырёхугольники $ABDC$ и $AKSL$ — гармонические: первый — дельтоид, а второй есть образ первого при проекции с окружности на себя через O. В силу свойств гармонического четырёхугольника точку M пересечения OA и KL можно переопределить как точку пересечения OA и касательной к окружности, восстановленной в S. Имеем $\angle ASO = 90°$ (дополнительный угол опирается на диаметр), $AM = SM$; значит, $AM = SM = OM$, M — середина AO.

   В конце концов эту задачу можно и в комплексных координатах посчитать.

4. Чевианы BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются на его высоте AH. Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle AHC_1$.

   Решение 1. Пролетарскому решению предшествует `пролетарская лемма`: если точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, то выполнено соотношение:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot \sin\angle BAD}{AC \cdot \sin\angle CAD}.$$

   Из этой леммы, кстати, мгновенно следует, что в любом треугольнике направление чевианы однозначно задаётся отношением синусов углов, на которые чевиана разбивает исходный угол треугольника.

   Вернёмся к задаче. Используя пролетарскую лемму и следствие из неё, достаточно доказать

$$\frac{\sin\angle AHB_1}{\sin\angle CHB_1} = \frac{\sin\angle AHC_1}{\sin\angle BHC_1} \Leftrightarrow \frac{AB_1}{CB_1} : \frac{HA}{HC} = \frac{AC_1}{BC_1} : \frac{HA}{HB},$$

   а последнее эквивалентно теореме Чевы для исходного треугольника и чевиан BB_1, CC_1, AH.

   Решение 2. Пусть P — точка пересечения BB_1 и CC_1. Зафиксируем треугольник ABC и его высоту AH, рассмотрим цепочку отображений:

$$(H) \to AB \to (C) \to AH \to (B) \to AC \to (H) \to (H).$$

   Символом (X) обозначается множество прямых, проходящих через X. Последнее отображение $(H) \to (H)$ определено как симметрия относительно прямой AH, все остальные отображения — сечения пучка прямых. Каждое из этих отображений *проективно*, т. е. взаимно однозначно и сохраняет двойные отношения, а значит и их композиция проективна. Достаточно доказать, что их композиция тождественна (это просто переформулировка условия задачи, так как объекты из условия преобразуются $HC_1 \to C_1 \to CC_1 \to P \to BB_1 \to B_1 \to HB_1 \to HC_1'$, и надо доказать, что $C_1' = C_1$). Тождественность проективного преобразования прямой достаточно проверить в трёх точках. В качестве трёх параметров можно рассмотреть ситуации, когда $P = A$, $P = H$, и когда P совпадает с ортоцентром треугольника.

   Решение 3. Пусть K и L — точки пересечения прямой B_1C_1 с прямыми BC и AH соответственно. Достаточно доказать, что четвёрка прямых (HB_1, HC_1, HL, HK) — гармоническая (по условию дан прямой уголок, а доказать нужно свойство биссектрисы). Но четвёрка точек (B_1C_1LK) гармоническая, так как получена из треугольника AB_1C_1 с помощью стандартного построения относительно чевиан B_1B, C_1C, AL.

5. Пусть M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Оказалось, что четырёхугольник $AMND$ можно вписать в окружность. Известно также, что описанная окружность треугольника ABN касается прямой AD. Докажите, что описанная окружность треугольника CDM также касается прямой AD.

   Решение. `Лемма`: вписанный четырёхугольник $ABCD$ является гармонический тогда и только тогда, когда окружность AA_0C касается отрезка AD, где A_0 — отражение вершины A относительно B. `Действительно`, после инверсии с центром в A получаем следующую ситуацию: A_0' — середина стороны AB' треугольника $AB'D'$, а C' — некоторая точка на стороне $B'D'$. Теперь совсем очевидна равносильность двух свойств: 1) $A_0'C'$ параллельна AD' (эквивалентно касанию из условия леммы); 2) C' — середина $B'D'$ (эквивалентно гармоничности $ABCD$).

   Для решения задачи достаточно применить лемму два раза к четырёхугольнику $AMND$ (один раз в обратную сторону, второй — в прямую; для отражённых вершин A и D соответственно).

6. На окружности ω выбраны точки A и B. Точка C — середина одной из дуг AB, а D — некоторая точка отрезка AB. Окружность ω_1 касается отрезков BD (в точке B_1), CD и окружности ω. Окружность ω_2 касается продолжения отрезка AB за точку B (в точке B_2), окружности ω (в точке K) и продолжения отрезка CD за точку D. Докажите, что $\angle B_1KB_2 = 90°$.

   Решение. При инверсии относительно C с радиусом CA ω и AB меняются местами и окружности ω_1 и ω_2 переходят друг в друга, а значит C, B_1, K лежат на одной прямой. Пусть CE — диаметр ω. При инверсии относительно E с радиусом EA окружность ω_2 переходит в себя, а значит E, B_2, K лежат на одной прямой. Угол между прямыми B_1K и B_2K опирается на диаметр CE, а значит он прямой.

7. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке S. Пусть K, L, M, N — отражения точки S относительно прямых AB, BC, CD, DA соответственно. Прямые AL и AM вторично пересекают описанные окружности треугольников SKL и SNM в точках P и Q соответственно. Докажите, что точки K, N, P, Q лежат на одной окружности.

   Решение. `Лемма:` Пусть B_1 и C_1 — отражения основания H высоты AH треугольника ABC с острыми углами B и C относительно сторон AC и AB соответственно. Тогда отрезки BH и BC_1 касаются окружности B_1C_1H. `Доказательство леммы:` заметим, что A — центр окружности B_1C_1H, $AH \perp BH \Rightarrow BH$ — касательная. Из осевой симметрии $BH = BC_1$, а значит BC_1 — тоже касательная. Доказано.

   Применим лемму к треугольникам ABC и ADC и к объектам из условия. Получим, что AS и AK — касательные к SKL, а AS и AN — касательные к SMN. Сотворим инверсию с центром в A и с радиусом AS. Тогда обе окружности SKL и SMN перейдут в себя, точки P и Q вернутся в L и в M, точки K и N останутся на месте. После этой инверсии исчезло 2/3 объектов из условия задачи, и теперь достаточно доказать, что точки $K = K'$, $L = P'$, $M = Q'$, $N = N'$ лежат на одной окружности. Гомотетией с коэффициентом 0.5 переводим их в проекции точки S пересечения перпендикулярных диагоналей на стороны четырёхугольника $ABCD$, а эти точки точно на окружности, можно просто поперекидывать вписанные уголочки в четырёх получившихся вписанных четырёхугольничках.

8. Касательная к описанной окружности Ω треугольника ABC в точке A пересекает прямую BC в точке X (O — центр Ω). Оказалось, что прямая, соединяющая точки касания вписанной в треугольник окружности ω со сторонами AB, AC, также проходит через X (I — центр ω). Докажите, что X, O, I лежат на одной прямой.

   Решение. Не нужно быть Шелком Холмсом в геометрии, чтобы заметить следующий факт: поляра точки X относительно ω есть прямая AA_1 (где A_1 — точка касания ω и BC, аналогично определены B_1 и C_1). Почему? По принципу полярной двойственности: X лежит на поляре точки A_1 (это прямая BC), X лежит на поляре точки A (из неё проведены отрезки касательных AB_1 и AC_1, а значит B_1C_1 — её поляра). Следовательно, X — полюс AA_1 относительно ω.

   От глаза наблюдательного геометра не скроется также и второе звено моего незамысловатого решения: поляра точки X относительно Ω тоже есть прямая AA_1. Очевидно, что X лежит на поляре точки A (на касательной). Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, а значит (BCA_1X) — гармоническая четвёрка, и X лежит на поляре точки A_1. *Здесь мы использовали гармоническое свойство поляры: если прямая ℓ проходит через точку K, пересекает окружность в точках P, Q и поляру точки K относительно этой окружности в точке L, то* $(PQKL) = -1$. Таким образом, X — полюс AA_1 относительно Ω.

   Из свойств поляр $XI \perp AA_1$ и $XO \perp AA_1$, и точки X, I, O коллинеарны.