Разнобой по геометрии

группа 10-1

24.11.2016

1. Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается его сторон BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. На продолжении отрезка AA_1 за точку A отмечена такая точка X, что $AX = AB_1 = AC_1$. Прямые XB_1 и XC_1 вторично пересекают ω в точках P и Q. Докажите, что PQ — диаметр ω.

3. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

4. Чевианы BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются на его высоте AH. Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle AHC_1$.

5. Пусть M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Оказалось, что четырёхугольник $AMND$ можно вписать в окружность. Известно также, что описанная окружность треугольника ABN касается прямой AD. Докажите, что описанная окружность треугольника CDM также касается прямой AD.

6. На окружности ω выбраны точки A и B. Точка C — середина одной из дуг AB, а D — некоторая точка отрезка AB. Окружность ω_1 касается отрезков BD (в точке B_1), CD и окружности ω. Окружность ω_2 касается продолжения отрезка AB за точку B (в точке B_2), окружности ω (в точке K) и продолжения отрезка CD за точку D. Докажите, что $\angle B_1KB_2 = 90^\circ$.

7. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке S. Пусть K, L, M, N — отражения точки S относительно прямых AB, BC, CD, DA соответственно. Прямые AL и AM вторично пересекают описанные окружности треугольников SKL и SNM в точках P и Q соответственно. Докажите, что точки K, N, P, Q лежат на одной окружности.

8. Касательная к описанной окружности Ω треугольника ABC в точке A пересекает прямую BC в точке X (O — центр Ω). Оказалось, что прямая, соединяющая точки касания вписанной в треугольник окружности ω со сторонами AB, AC, также проходит через X (I — центр ω). Докажите, что X, O, I лежат на одной прямой.