Разнобой по геометрии, краткие решения

группа 10-1

27.10.2016

1. Пусть N — проекция середины M основания BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) на сторону AC, а S — середина MN. Докажите, что $AS \perp BN$.

   Решение 1. Пусть T — середина BM. Треугольники ANM и AMB прямоугольные и переводятся друг в друга поворотной гомотетией с центром A. При этой гомотетии S переходит в T, а значит AST — тоже прямоугольный. Кроме того, ST — средняя линия NMB. Имеем $BN \parallel ST \perp AS$.

   Решение 2. Пусть R — середина CN. Треугольники NAM и NMC переводятся друг в друга поворотной гомотетией с центром в N, причём угол поворота прямой. AS и MR — их соответственные медианы, значит $AS \perp MR$. Но $MR \parallel BN$ как средняя линия.

   Решение 3. Пусть K — проекция A на BN. Нужно доказать, что A, K, S лежат на одной прямой. Окружность ω_1, построенная на отрезке AB как на диаметре, проходит через M и K и касается отрезка MN (тривиальный счёт углов). Окружность ω_2, построенная на отрезке AN как на диаметре, проходит через K и касается MN. Видим две окружности ω_1 и ω_2, пересекающиеся в точках A и K, и отрезок MN их общей внешней касательной. Радикальная ось AK проходит через его середину S.

2. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке T, середина A_1T обозначена за M. Докажите, что длина отрезка касательной, проведённой из M к описанной окружности треугольника ABC, равна длине MT.

   Решение. Пусть α — окружность, построенная на A_1T как на диаметре, а ω — описанная окружность треугольника ABC. На самом деле надо доказать ортогональность ω и α. Из теорем Чевы и Менелая легко получается, что $BA_1/A_1C = BT/TC = k$, а значит α — окружность Аполлония для точек B и C. Но тогда точки B и C инверсны относительно α, а значит α ортогональна любой окружности, проходящей через B и C, в том числе ω.

3. К двум не пересекающимся окружностям проведены внешняя PM и внутренняя QN касательные. Точки P, Q лежат на одной из окружностей; M, N — на другой. Докажите, что точка пересечения PQ и MN лежит на линии центров.

   Решение 1. Пусть вторая общая внешняя касательная пересекает PM в точке C и QN в точке B, а сами PM и QN пересекаются в A. Самое время вспомнить *лемму о проекции вершины на биссектрису*. Приведём её формулировку в разбитом на простые пункты виде.

   (*Лемма о проекции вершины на биссектрису*) Пусть B_C — проекция вершины B треугольника ABC на биссектрису угла C, I — центр вписанной окружности. Верны утверждения:

   а) B_C лежит на биссектрисе угла C треугольника ABC;

   б) B_C лежит на средней линии, параллельной стороне AC;

   в) B_C лежит на окружности, построенной на отрезке BI как на диаметре;

   г) B_C лежит на прямой, соединяющей точки касания вписанной в треугольник окружности со сторонами AB, AC;

   д) B_C лежит на прямой, соединяющей точки касания вневписанной окружности треугольника со стороной AB и продолжением стороны AC.

   Аналогичными свойствами обладает проекция вершины на внешнюю биссектрису, только в последних трёх пунктах необходимо заменить вписанную и вневписанную окружности на две другие вневписанные.

Вернёмся к задаче: окружности из условия служат вписанной и вневписанной окружностями в треугольник ABC, а искомая точка из условия есть проекция вершины B на биссектрису угла C. Решение задачи следует из пунктов (а), (г), (д).

Альтернативные решения исходной задачи можно интерпретировать как доказательства почти всех пунктов леммы.

Решение 2. Пусть центры окружностей обозначены за I и J. Зафиксируем первую окружность, точки I, P, Q, касательные к этой окружности в точках P и Q и точку пересечения A этих касательных. Центр J_t второй окружности будем линейно двигать по внешней биссектрисе угла PAQ. Тогда точки M_t и N_t будут двигаться линейно как проекции J_t на неподвижные прямые AP и AQ. Легко понять, что прямая M_tN_t будет оставаться параллельной самой себе и также линейно двигаться. Точка X_t пересечения PQ и M_tN_t будет двигаться линейно как пересечение неподвижной прямой и движущейся линейно прямой. Точка Y_t пересечения PQ и IJ_t будет двигаться линейно из-за соображений подобия, обусловленных параллельностью PQ и внешней биссектрисы PAQ. Наша цель доказать, что $X_t = Y_t$ при всех t, но из-за линейной зависимости нам достаточно это проверить при двух параметрах t, т. е. решить задачу в двух вырожденных случаях. В качестве таких случаев можно рассмотреть два положения J_t, когда окружности из условия касаются (это когда $P = M_t$ и $Q = N_t$), при этих t задача верна по тривиальным причинам.

Решение 3. Введём точки A, B, C как в решении 1. Кроме того, проведём вторую внутреннюю касательную, пересекающую AB и AC в точках E и D соответственно. Вспомним формулировку *теоремы Брианшона.*

(*Теорема Брианшона для четырёхугольника*) Отрезки, соединяющие точки касания вписанной в четырёхугольник окружности с противоположными сторонами, пересекаются в точке пересечения диагоналей четырёхугольника.

Применим эту теорему к четырёхугольнику $BCDE$ два раза относительно обеих окружностей (ничего страшного, что одна из них вневписанная). Получим, что точка пересечения его диагоналей BD и CE лежит как на PQ, так и на MN. Но CE и есть линия центров.

4. Биссектрисы BB_1 и CC_1 прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90^\circ$) пересекаются в точке I, а M — середина B_1C_1. Докажите, что $IM \perp BC$.

   Решение. Опустим перпендикуляры B_1P и C_1Q на гипотенузу BC. Из соображений осевой симметрии относительно биссектрис BB_1 и CC_1 они оба касаются вписанной в треугольник окружности. Остаётся осознать, что IM — средняя линия прямоугольной трапеции B_1PQC_1.

   На разборе обсуждались в основном счётные решения как более естественные для этой задачи. Задача легко и непринуждённо считается с помощью пары теорем синусов, а также в декартовых, барицентрических и (при желании) комплексных координатах.

5. Пусть A' — точка пересечения касательной к описанной окружности треугольника ABC, восстановленной в вершине A, со средней линией, параллельной стороне BC, и пусть точки B' и C' определены аналогично. Докажите, что A', B', C' лежат на одной прямой.

   Решение 1. Эта прямая есть радикальная ось описанной окружности треугольника и окружности девяти точек.

   Решение 2. Эта прямая есть прямая Гаусса для следующей четвёрки прямых: стороны треугольника и прямая Паскаля треугольника.

6. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Прямая AO вторично пересекает ω в точке A'. Касательная к ω, восстановленная в точке A', пересекает BC в точке X. Прямая XO пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что O — середина PQ.

Решение 1. Переопределим точки P и Q как такие точки на сторонах AB и AC, что $APA'Q$ — параллелограмм. Теперь надо доказать, что PQ проходит через X. Из соображений центральной симметрии прямые BO и $A'Q$ пересекаются на ω в точке B'. Добивает задачу теорема Паскаля для шестиугольника $A'A'ACBB'$.

Решение 2. Переопределим точки P и Q как такие точки на сторонах AB и AC, что $APA'Q$ — параллелограмм. Теперь надо доказать, что PQ проходит через X. Треугольники $A'BP$ и $A'CQ$ подобны (пусть коэффициент равен k). Тогда $BP/QC = k$, $PA/AQ = A'Q/A'P = 1/k$, $XB/XC = XB/XA' \cdot XA'/XC = k^2$ (в последнем равенстве используется подобие XBA' и $XA'C$). Из этих равенств следует условие теоремы Менелая для треугольника ABC и точек P, Q, X на его сторонах.

Для адептов секты комплексных геометров задача служит тривиальным упражнением.

7. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а диагонали AC и BD — в точке S. Пусть M и N — середины сторон BC и AD. Докажите, что описанная окружность треугольника MSN касается прямой PS.

   Решение 1. Пусть O — центр описанной окружности $ABCD$, Q — точка пересечения BC и AD, U и V — центры описанных окружностей MSN и MQN соответственно. Достаточно доказать, что $PS \perp SU$. Так как PS — поляра точки Q относительно описанной окружности $ABCD$, то $QO \perp PS$. Четырёхугольник $QMON$ — вписанный с диаметром QO, а значит V лежит на QO. Осталось доказать, что $SU \parallel QV$, т. е. что в треугольниках MSN и MQN направления на центры описанных окружностей параллельны. Посчитав уголочки, можно убедиться в том, что для доказательства последнего факта достаточно равенства $\angle(SM, QM) = -\angle(SN, QN)$, которое достигается за счёт подобия треугольников SMC и SND.

   Решение 2. Пусть точки X и Y симметричны S относительно M и N соответственно. Заметим, что треугольник BXC переводится в треугольник DSA композицией гомотетии с центром в P и осевой симметрии относительно биссектрисы ℓ угла между AB и CD, а значит PS и PX симметричны относительно ℓ. Аналогично PS и PY, т. е. P, X, Y лежат на одной прямой; $XY \parallel MN$ как средняя линяя. Получили, что *направления* (т. е. классы параллельности) прямых MN и PS симметричны относительно ℓ. Кроме того, медианы SM и SN двух подобных треугольников SBC и SAD симметричны относительно биссектрисы угла между диагоналями, которая параллельна ℓ, а значит направления SM и SN также симметричны относительно ℓ. Но тогда $\angle(MN, SM) = -\angle(PS, SN)$, что и означает касание.

   Угрожая физической расправой и лишением премии за квартал, я принудил некоторых школьников и эту геометрию посчитать в комплексных координатах, благо при обладании минимальным скиллом решение умещается в один лист A4.