

# Разнойбой по геометрии

группа 10-1

27.10.2016

1. Пусть  $N$  — проекция середины  $M$  основания  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = AC$ ) на сторону  $AC$ , а  $S$  — середина  $MN$ . Докажите, что  $AS \perp BN$ .
2. Вписанная окружность неравнобедренного треугольника  $ABC$  касается его сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно. Прямые  $B_1C_1$  и  $BC$  пересекаются в точке  $T$ , середина  $A_1T$  обозначена за  $M$ . Докажите, что длина отрезка касательной, проведённой из  $M$  к описанной окружности треугольника  $ABC$ , равна длине  $MT$ .
3. К двум не пересекающимся окружностям проведены внешняя  $PM$  и внутренняя  $QN$  касательные. Точки  $P$ ,  $Q$  лежат на одной из окружностей;  $M$ ,  $N$  — на другой. Докажите, что точка пересечения  $PQ$  и  $MN$  лежит на линии центров.
4. Биссектрисы  $BB_1$  и  $CC_1$  прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) пересекаются в точке  $I$ , а  $M$  — середина  $B_1C_1$ . Докажите, что  $IM \perp BC$ .
5. Пусть  $A'$  — точка пересечения касательной к описанной окружности треугольника  $ABC$ , восстановленной в вершине  $A$ , со средней линией, параллельной стороне  $BC$ , и пусть точки  $B'$  и  $C'$  определены аналогично. Докажите, что  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  лежат на одной прямой.
6. Остроугольный неравнобедренный треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\omega$  с центром  $O$ . Прямая  $AO$  вторично пересекает  $\omega$  в точке  $A'$ . Касательная к  $\omega$ , восстановленная в точке  $A'$ , пересекает  $BC$  в точке  $X$ . Прямая  $XO$  пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $O$  — середина  $PQ$ .
7. Продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  вписанного четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ , а диагонали  $AC$  и  $BD$  — в точке  $S$ . Пусть  $M$  и  $N$  — середины сторон  $BC$  и  $AD$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $MSN$  касается прямой  $PS$ .