Процессы и операции

группа 10-1

24.10.2016

1. В квадратной таблице в каждой клетке стоит по фишке. Известно, что после некоторой перестановки фишек, все попарные расстояния ме3жду ними не уменьшились (после перестановки в каждой клетке опять находится по одной фишке). Докажите, что на самом то деле никакое попарное расстояние между фишками не изменилось.

2. За один ход разрешается отрезать по отрезку кусок от многоугольника, перевернуть этот кусок и приклеить его обратно по линии разреза, если переворачиваемый кусок и оставшийся не накладываются. Можно ли такими операциями из квадрата получить правильный треугольник?

3. Пусть $n > 1$ — нечётное число. Дано n целых чисел $a_1, \ldots, a_n$. За один шаг они превращаются в $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_n+a_1}{2}$ соответственно. Докажите, что если на каждом шаге получаются только целые числа, то изначально все числа были равны.

4. В каждой клетке квадратной таблицы 50×50 находится либо 1, либо -1, причём сумма всех чисел таблицы не больше 100 и не меньше -100. Докажите, что найдётся такой квадрат 25×25, что абсолютная величина суммы чисел, находящихся в этом квадрате, не превосходит 25.

5. На плоскости дано n точек общего положения (т. е. никакие три из них не лежат на одной прямой). Докажите, что существует замкнутая несамопересекающаяся ломаная, вершинами которой являются n данных точек.

6. *Медианой* системы точек назовём такую прямую, проходящую через две точки системы, что по разные стороны от этой прямой находится одинаковое число точек. Какое минимальное число медиан может быть у системы из $2n$ точек общего положения?

7. В вершинах некоторого квадрата сидит по одному кузнечику. Каждую минуту ровно один кузнечик перепрыгивает центрально симметрично через какого-то другого. Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах большего квадрата, чем изначальный?

8. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных целыми числами по порядку. В комнатах живут 2016 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов); кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах K-той и $(K+1)$-ой, приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(K-1)$-ую и $(K+2)$-ую комнаты (пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают). Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

9. В нескольких мешках лежит ровно $\frac{n(n+1)}{2}$ монет. За один ход мы берём по одной монете из мешка, заводим новый мешок и кладём туда взятые монеты. Пустые мешки выкидываем. Докажите, что через некоторое время распределение монет по мешкам стабилизируется.