Неравенство Йенсена, часть 2

группа 10-1
20.10.2016

1. (*Весовое неравенство о средних*) Докажите, для при любых положительных весах $m_1, \ldots, m_n$ для любого набора положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполнено неравенство:

$$\frac{m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \geqslant \sqrt[m_1+\ldots+m_n]{a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{m_n}}.$$

2. Для точки S внутри треугольника ABC обозначим x, y, z расстояния до прямых BC, CA, AB соответственно. Найдите точку S, в которой достигается минимум $\dfrac{BC}{x} + \dfrac{CA}{y} + \dfrac{AB}{z}$.

3. Докажите, что существует такое натуральное число N, что для любой последовательности вещественных чисел $1 = x_0 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_N > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{N-1}^2}{x_N} \geqslant 3.999.$$

4. Докажите, что для любых положительных x, y, z выполнено неравенство

$$x^5y + y^5z + z^5x \geqslant x^2y^3z + y^2z^3x + z^2x^3y.$$

Неравенство Йенсена, часть 2

группа 10-1
20.10.2016

1. (*Весовое неравенство о средних*) Докажите, для при любых положительных весах $m_1, \ldots, m_n$ для любого набора положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполнено неравенство:

$$\frac{m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \geqslant \sqrt[m_1+\ldots+m_n]{a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{m_n}}.$$

2. Для точки S внутри треугольника ABC обозначим x, y, z расстояния до прямых BC, CA, AB соответственно. Найдите точку S, в которой достигается минимум $\dfrac{BC}{x} + \dfrac{CA}{y} + \dfrac{AB}{z}$.

3. Докажите, что существует такое натуральное число N, что для любой последовательности вещественных чисел $1 = x_0 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_N > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{N-1}^2}{x_N} \geqslant 3.999.$$

4. Докажите, что для любых положительных x, y, z выполнено неравенство

$$x^5y + y^5z + z^5x \geqslant x^2y^3z + y^2z^3x + z^2x^3y.$$