Неравенство Йенсена, краткие решения

группа 10-1

13.10.2016

Теорема (Неравенство Йенсена). *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — неотрицательные вещественные числа, причём $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Тогда для любой выпуклой вниз функции $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ и для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ имеет место неравенство:*

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n) \geqslant f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n).$$

3. Пусть a, b, c, d — положительные числа, причём $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1-\sqrt{a}} + \frac{1}{1-\sqrt{b}} + \frac{1}{1-\sqrt{c}} + \frac{1}{1-\sqrt{d}} \geqslant 8.$$

Решение. Чуть-чуть поколдовав над неравенством (а именно вычтя из обеих его частей 4), получим его эквивалентную форму:

$$\frac{a}{\sqrt{a}-a} + \frac{b}{\sqrt{b}-b} + \frac{c}{\sqrt{c}-c} + \frac{d}{\sqrt{d}-d} \geqslant 4.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = 1/(\sqrt{t} - t)$ в области $(0, 1)$. Аккуратно посчитав вторую производную, можно убедиться, что она выпукла вниз, а значит можно записать неравенство Йенсена для точек a, b, c, d и весов a, b, c, d:

$$\frac{a}{\sqrt{a}-a} + \frac{b}{\sqrt{b}-b} + \frac{c}{\sqrt{c}-c} + \frac{d}{\sqrt{d}-d} = af(a) + bf(b) + cf(c) + df(d) \geqslant f(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqslant f(1/4) = 4,$$

так как $0 < (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < (a + b + c + d)^2 = 1$, а функция $f(t)$ достигает своего минимума в области $(0, 1)$ при $t = 1/4$ (первая производная в помощь).

Комментарий: если пытаться работать с исходным неравенством «втупую» (с равными весами), то можно нарваться на точку перегиба функции $f(t) = 1/(1 - \sqrt{t})$. При желании можно и эту идею довести до решения, но придётся двигать точки по отдельным промежуткам выпуклости и рассматривать несколько случаев, в каждом из которых придётся решить неприятное неравенство одной переменной. В решении выше ключевую роль сыграл хитрый трюк: часть выражений от a, b, c, d оказалось удобным считать весами, а остальную часть можно засунуть в функцию $f(t)$. В результате получилась функция без точек перегиба, и эта функция ничего не смогла противопоставить мощи неравенства Йенсена.

4. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — стороны некоторого многоугольника, а P — его периметр. Докажите, что

$$\frac{a_1}{P-2a_1} + \frac{a_2}{P-2a_2} + \ldots + \frac{a_n}{P-2a_n} \geqslant \frac{n}{n-2}.$$

Решение 1. Рассмотрим выпуклую вниз $f(t) = 1/t$ в области $(0, +\infty)$. Тогда, взяв $x_i = P - 2a_i$ и $\alpha_i = \frac{a_i}{P}$ и применив неравенство Йенсена, получим, что

$$\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{P-2a_i} \geqslant \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} a_i(P-2a_i)},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{P-2a_i} \geqslant \frac{P^2}{P^2 - 2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)} \geqslant \frac{n}{n-2}.$$

Последний переход возможен ввиду того, что $n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2) \geqslant (a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$. Все x_i положительны из-за неравенства многоугольника.

Решение 2. Неравенство однородно, и можно считать, что $P=1$. Все $a_i \in (0,1/2)$ из-за неравенства многоугольника. Рассмотрим $f(t)=t/(1-2t)$. Легко понять, что она выпукла вниз на $(0,1/2)$ (гипербола). Применим неравенство Йенсена для неё, точек a_i и весов $\alpha_i=1/n$, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-2a_i} \geqslant n \cdot \frac{(a_1+\ldots+a_n)/n}{1-2(a_1+\ldots+a_n)/n} = \frac{n}{n-2}.$$

5. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leqslant \left(\frac{a}{c}\right)^{a} \left(\frac{b}{d}\right)^{b}.$$

Решение. Рассмотрим выпуклую вниз функцию $f(t)=-\ln t$ в области $(0,+\infty)$. Применив неравенство Йенсена для функции $f(t)$, весов $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{a+b}$ и точек $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{b}$, получим

$$-\ln\left(\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{a}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{d}{b}\right) \leqslant -\frac{a}{a+b}\ln\frac{c}{a}-\frac{b}{a+b}\ln\frac{d}{b}.$$

Подействовав монотонной функцией $g(t)=e^t$ на обе части последнего неравенства, получим требуемое.

6. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Тогда докажите неравенство

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

Решение. Рассмотрим выпуклую вниз функцию $f(t)=t^2$. Зададим точки $x_1=c, x_2=b, x_3=a$ и веса $\alpha_1=\frac{a+c-b}{a+b+c}, \alpha_2=\frac{b+c-a}{a+b+c}, \alpha_3=\frac{a+b-c}{a+b+c}$ и применим неравенство Йенсена (очевидно, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ и все $\alpha_i>0$ из-за неравенства треугольника). Получим, что

$$c^2\cdot\frac{a+c-b}{a+b+c}+b^2\cdot\frac{b+c-a}{a+b+c}+a^2\cdot\frac{a+b-c}{a+b+c} \geqslant \left(\frac{ac+c^2-bc+b^2+bc-ab+a^2+ab-ac}{a+b+c}\right)^2,$$

откуда

$$c^2\left((a+c)^2-b^2\right)+b^2\left((b+c)^2-a^2\right)+c^2\left((a+b)^2-c^2\right) \geqslant \left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

или

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

7. Пусть x, y, z — положительные числа, причём $x+y+z=1$. Докажите, что

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(t)=\ln(1+\frac{1}{t})$ в области $(0,+\infty)$. Она выпукла вниз, так как $f''(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(t+1)^2}>0$. Применив неравенство Йенсена для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{3}$, получим

$$\frac{1}{3}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)\right) \geqslant \ln\left(1+\frac{3}{x+y+z}\right).$$

Вспомнив, что $g(t)=e^t$ — монотонная функция на $(0,+\infty)$ и что $x+y+z=1$, легко получим требуемое неравенство.