Неравенство Йенсена

группа 10-1

13.10.2016

Определение. Функция $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$, определённая на конечном или бесконечном интервале (a,b), называется *выпуклой вниз*, если любая хорда её графика лежит выше самого графика. Алгебраически это условие записывается неравенством $\lambda f(x)+\mu f(y)\geqslant f(\lambda x+\mu y)$ при всех $x,y\in(a,b)$, $\lambda,\mu\in[0,1]$, $\lambda+\mu=1$. Функция f *выпукла вверх*, если любая хорда её графика лежит ниже графика.

Теорема (Неравенство Йенсена). *Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ — неотрицательные вещественные числа, причём $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$. Тогда для любой выпуклой вниз функции $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ и для любых $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(a,b)$ имеет место неравенство:*

$$\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\ldots+\alpha_n f(x_n)\geqslant f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n).$$

Если функция выпукла вверх, то знак неравенства меняется на противоположный.
Если неравенство обратилось в равенство, то функция f на отрезке $[\min x_i,\max x_i]$ линейна.

Теорема. *Пусть функция $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ имеет вторую производную во всех точках (т. е. дважды дифференцируема). Тогда f выпукла вниз тогда и только тогда, когда для всех $x\in(a,b)$ $f''(x)\geqslant 0$.*

1. При $a+b+c=36$ найдите максимум $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$.

2. Для $x_1,x_2,\ldots,x_n$ из отрезка $[0;\frac{\pi}{2}]$ докажите неравенство:
$$\frac{\cos x_1+\cos x_2+\ldots+\cos x_n}{n}\leqslant\cos\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right).$$

3. Пусть a, b, c, d — положительные числа, причём $a+b+c+d=1$. Докажите, что
$$\frac{1}{1-\sqrt{a}}+\frac{1}{1-\sqrt{b}}+\frac{1}{1-\sqrt{c}}+\frac{1}{1-\sqrt{d}}\geqslant 8.$$

4. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — стороны некоторого многоугольника, а P — его периметр. Докажите, что
$$\frac{a_1}{P-2a_1}+\frac{a_2}{P-2a_2}+\ldots+\frac{a_n}{P-2a_n}\geqslant\frac{n}{n-2}.$$

5. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство
$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b}\leqslant\left(\frac{a}{c}\right)^a\left(\frac{b}{d}\right)^b.$$

6. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Тогда докажите неравенство
$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0.$$

7. Пусть x, y, z — положительные числа, причём $x+y+z=1$. Докажите, что
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geqslant 64.$$