Введение в теорию вероятностей, краткие решения

группа 10-1
10.10.2016

Определение. (Дискретным) *вероятностным пространством* называется конечное (или счётное) множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, каждому элементу ω_i которого сопоставлен вещественный вес p_i с условиями $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Подмножества вероятностного пространства Ω называются *событиями*, элементы ω_i — *элементарными исходами*. Для каждого события $A \subset \Omega$ определена его *вероятность* $\mathsf{P}(A)$ посредством формулы $\mathsf{P}(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p_i$. В частности, $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Для каждой случайной величины $\xi(\omega)$ определено её *математическое ожидание*: $\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^n p_i \xi(\omega_i)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин ξ и η и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, $\mathbb{E}(\lambda \cdot \xi) = \lambda \cdot \mathbb{E}(\xi)$.

Каждому событию $A \subset \Omega$ можно сопоставить его *индикатор* — случайную величину $\mathcal{I}_A(\omega)$, равную 1 для $\omega \in A$ и 0 при $\omega \in \Omega \setminus A$. Верно равенство $\mathsf{P}(A) = \mathbb{E}\mathcal{I}_A$.

В приведённых решениях всех задач этого листка в дискретным вероятностным пространством Ω веса p_i элементарных исходов берутся равными друг другу, т. е. $p_i = 2^{-|\Omega|}$.

1. В классе n школьников, они посещают t кружков, каждый кружок посещают ровно k школьников, причём $t < 2^{k-1}$. Докажите, что школьников можно раскрасить в два пола так, чтобы на каждом кружке были и мальчики, и девочки.

   Решение. Пусть Ω — множество всех раскрасок школьников в два пола. Для каждого $1 \leqslant s \leqslant t$ заведём событие A_s — множество раскрасок, при которых кружок номер s раскрашен в один пол; случайную величину $\xi(\omega)$ определим как количество кружков, раскрашенных в один пол. Понятно, что $\mathsf{P}(A_s) = 2^{-k+1}$, так как есть ровно две монохромные раскраски фиксированного подмножества, а остальные элементы можно красить как угодно. Ясно также, что $\xi(\omega) = \sum_{s=1}^t \mathcal{I}_{A_s}(\omega)$. Но тогда $\mathbb{E}(\xi) = \sum_{s=1}^t \mathbb{E}\mathcal{I}_{A_s} = \sum_{s=1}^t \mathsf{P}(A_s) = t \cdot 2^{-k+1} < 1$. Имеем $\mathbb{E}(\xi) < 1$, а значит для какой-то раскраски ω выполнено $\xi(\omega) < 1$, т. е. $\xi(\omega) = 0$.

2. Докажите, что для любого натурального n существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

   Решение. Пусть Ω — множество всех расстановок стрелок. Для каждого способа $\sigma \in S_n$ упорядочить вершины заведём событие A_σ, состоящее в том, что вершины в порядке σ образуют гамильтонов путь. Легко видеть, что $\mathsf{P}(A_\sigma) = 2^{-n+1}$, так как $n-1$ рёбер внутри пути σ должны быть ориентированы в правильную сторону, а как ориентированы все остальные рёбра нас не волнует. Пусть $\xi(\omega)$ — число гамильтоновых путей в графе ω. Для каждой расстановки стрелок ω выполнено равенство $\xi(\omega) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathcal{I}_{A_\sigma}(\omega)$, что нам возможность посчитать $\mathbb{E}\xi = \sum_{\sigma \in S_n} \mathbb{E}\mathcal{I}_{A_\sigma} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{P}(A_\sigma) = n! \cdot 2^{1-n}$. По условию надо доказать существование такого графа ω, что $\xi(\omega) > \mathbb{E}\xi$. Для этого достаточно найти хотя бы один граф ω', что $\xi(\omega') < \mathbb{E}\xi$ (если функция в какой-то точке меньше среднего, то в какой-то другой точке она больше среднего). В качестве ω' подойдёт граф на числах $1, 2, \dots, n$, где $i \to j \Leftrightarrow i < j$.

3. Через $p_n(k)$ обозначим количество перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$, которые оставляют на месте ровно k элементов. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$

   Решение. Пусть Ω — множество перестановок, $\xi\omega$ — число неподвижных элементов $\omega \in \Omega$. По определению математического ожидания имеем $\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^n k p_n(k)/n!$ (ясное дело, что $\mathsf{P}(\{\omega \colon \xi(\omega) = k\}) = p_n(k)/n!$). С другой стороны, для каждого $1 \leqslant s \leqslant n$ можно завести событие A_s неподвижности элемента s, и $\mathsf{P}(A_s) = (n-1)!/n! = 1/n$ (элемент s должен остаться на месте, а остальные переставляются как угодно). Равенство случайных величин $\xi(\omega) = \sum_{s=1}^{n} \mathcal{I}_{A_s}(\omega)$ влечёт равенство математических ожиданий $\mathbb{E}\xi = \sum_{s=1}^{n} \mathbb{E}\mathcal{I}_{A_s} = \sum_{s=1}^{n} \mathsf{P}(A_s) = n \cdot (1/n) = 1$. Сопоставляя значения $\mathbb{E}\xi$, посчитанные двумя способами, получаем требуемое равенство.

4. У каждого из двух равных правильных додекаэдров отметили по 9 вершин. Докажите, что первый додекаэдр можно так совместить со вторым, чтобы по крайней пять его отмеченных вершин совпали с отмеченными вершинами второго.

   Решение. Пусть Ω — множество вращений ω пространства, совмещающих второй додекаэдр с первым; $\xi(\omega)$ — число совпавших отмеченных вершин. Для каждой отмеченной вершины s второго додекаэдра рассмотрим событие A_i, состоящее в том, что она при вращении ω совместилась с отмеченной вершиной первого додекаэдра. Выполнены равенства $\xi(\omega) = \sum_{s=1}^{9} \mathcal{I}_{A_s}(\omega)$, $\mathbb{E}\xi = \sum_{s=1}^{9} \mathbb{E}\mathcal{I}_{A_s} = \sum_{s=1}^{9} \mathsf{P}(A_s) = 9 \cdot 27/60 = 81/20 > 4$. Комментарий: существует ровно три вращения пространства, совмещающих две конкретные вершины, поэтому действительно $\mathsf{P}(A_s) = (3 \cdot 9)/(3 \cdot 20)$. Неравенство $\xi(\omega) > 4$ влечёт существование требуемого вращения.

5. Докажите, что из любого графа можно выкинуть не более чем $1/d$ его рёбер так, чтобы стало возможным раскрасить его вершины в d цветов правильным образом.

   Решение. Пусть Ω — множество случайных раскрасок вершин исходного графа в d цветов. Концы каждого фиксированного ребра раскрашены в один цвет с вероятностью $1/d$, а значит средняя доля одноцветных рёбер равна $1/d$ (по хорошему тут должно быть расписано равенство мат. ожиданий, но лень взяла верх). Но тогда существует раскраска, в которой доля одноцветных рёбер не превосходит $1/d$. Их и выкинем. Раскраска стала правильной.

6. На плоскости даны 10 точек. Докажите, что их можно покрыть непересекающимися кругами радиуса 1.

   Идея решения. Замостим плоскость шестиугольниками, впишем в них круги. Несложно посчитать, что вписанный круг занимает $p = \sqrt{3}\pi/6$ площади шестиугольника. Рассмотрим образ этого набора кругов при случайном параллельном переносе. В силу периодичности шестиугольной решётки все эти образы получаются с помощью переносов на всевозможные векторы с фиксированным началом и с концом в фиксированном шестиугольнике Ω. Это наблюдение позволяет нам ввести вероятностную меру на множестве переносов: *событием* назовём подмножество $A \subset \Omega$, а его вероятность определим как отношение площадей: $\mathsf{P}(A) = S(A)/S(\Omega)$. Вероятность накрытия конкретной точки случайной копией исходного набора кругов равна $p > 0.9$, а значит мат. ожидание числа накрытых точек из 10 данных больше 9. Но тогда существует параллельная копия изначального набора кругов, покрывающая все 10 точек.

7. Каждый житель посёлка Большие Коты знаком не менее чем с 30% населения. Докажите, что существует пара жителей, которые в объединении знают не менее половины населения.

   Решение. Ребрами будем обозначать незнакомства, всего вершин n (в частности, каждая вершина соединена ребром с самой собой!). По условию $\deg v_s \leqslant 0.7n$; доказать надо, что пересечение соседей каких-то двух вершин составляет не больше $0.5n$.

   Выберем случайную упорядоченную пару вершин (возможно, совпадающих) и посчитаем количество ξ их общих соседей. Пусть ξ_s — индикатор того, что вершина v_s оказалась общим соседом двух выбранных. Тогда можно записать равенства $\mathbb{E}\xi = \sum_{s=1}^{n} \mathbb{E}\xi_s = \sum_{s=1}^{n} \deg^2 v_s/n^2 \leqslant n \cdot 0.7^2 = 0.49n < 0.5n$. Получаем, что существует «хорошая» пара вершин.

8. Дано несколько различных натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать не менее трети так, чтобы среди выбранных не нашлось тройки различных x, y, z таких, что $x + y = z$.

   Решение 1. Пусть S — множество положительных вещественных чисел с дробной частью в диапазоне $[1/3, 2/3)$. Ясно, что S свободно от сумм. Выберем случайное число $\alpha \in (0, 1]$.

Тогда для каждого числа x из исходного набора вероятность попадания внутрь множества S/α равна $\mathsf{P}(\{\alpha\colon \alpha\cdot x\in S\})=1/3$. Получаем, что в среднем в S/α попадает треть чисел. Но тогда существует α такое, что S/α (тоже свободное от сумм), содержащее хотя бы треть чисел.

Решение 2. Пусть $p=3k+1$ — достаточно большое простое число. Введём множество $S=\{k,\dots,2k\}\subset\mathbb{Z}_p$. Пусть $\alpha\in\mathbb{Z}_p^*$ — случайный ненулевой остаток. Множество αS свободно от сумм по модулю p, вероятность накрытия отдельного данного числа множеством αS равна $(k+1)/3k>1/3$, а значит в среднем множество αS накрывает больше трети исходных чисел. Остаётся добавить, что свобода от сумм в $\mathbb{Z}_p$ влечёт свободу от сумм в $\mathbb{Z}$.