Введение в теорию вероятностей

группа 10-1
10.10.2016

Определение. (Дискретным) *вероятностным пространством* называется конечное (или счётное) множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, каждому элементу ω_i которого сопоставлен вещественный вес p_i с условиями $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Подмножества вероятностного пространства Ω называются *событиями*, элементы ω_i — *элементарными исходами*. Для каждого события $A \subset \Omega$ определена его *вероятность* $\mathsf{P}(A)$ посредством формулы $\mathsf{P}(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p_i$. В частности, $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Для каждой случайной величины $\xi(\omega)$ определено её *математическое ожидание*: $\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} p_i \xi(\omega_i)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин ξ и η и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, $\mathbb{E}(\lambda \cdot \xi) = \lambda \cdot \mathbb{E}(\xi)$.

Каждому событию $A \subset \Omega$ можно сопоставить его *индикатор* — случайную величину $\mathcal{I}_A(\omega)$, равную 1 для $\omega \in A$ и 0 при $\omega \in \Omega \setminus A$. Верно равенство $\mathsf{P}(A) = \mathbb{E}\mathcal{I}_A$.

0. *Случайный граф* на n вершинах — элемент множества Ω всех графов на n фиксированных занумерованных вершинах; все элементарные исходы равновероятны (т. е. $p_i = 2^{-C_n^2}$). Разложив соответствующую случайную величину в сумму индикаторов, найдите математическое ожидание числа а) рёбер; б) треугольников в случайном графе на n вершинах.

   Решение. Для каждой тройки s вершин заведём событие A_s — множество всех графов, где все три потенциальных ребра между вершинами тройки s проведены. Тогда число $\xi(\omega)$ треугольников в графе ω выражается формулой $\xi(\omega) = \sum_s \mathcal{I}_{A_s}(\omega)$, суммирование справа ведётся по всевозможным тройкам вершин. Свойство линейности математического ожидания влечёт $\mathbb{E}\xi = \sum_s \mathbb{E}\mathcal{I}_{A_s}$. Заметим, что $\mathbb{E}\mathcal{I}_{A_s} = \mathsf{P}(A_s) = 1/8$, так как конкретный треугольник наблюдается только в восьмой части всех графов. Всего троек вершин C_n^3, окончательный ответ $C_n^3/8$.

1. В классе n школьников, они посещают t кружков, каждый кружок посещают ровно k школьников, причём $t < 2^{k-1}$. Докажите, что школьников можно раскрасить в два пола так, чтобы на каждом кружке были и мальчики, и девочки.

2. Докажите, что для любого натурального n существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

3. Через $p_n(k)$ обозначим количество перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, которые оставляют на месте ровно k элементов. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$

4. У каждого из двух равных правильных додекаэдров отметили по 9 вершин. Докажите, что первый додекаэдр можно так совместить со вторым, чтобы по крайней пять его отмеченных вершин совпали с отмеченными вершинами второго.

5. Докажите, что из любого графа можно выкинуть не более чем $1/d$ его рёбер так, чтобы стало возможным раскрасить его вершины в d цветов правильным образом.

6. На плоскости даны 10 точек. Докажите, что их можно покрыть непересекающимися кругами радиуса 1.

7. Каждый житель посёлка Большие Коты знаком не менее чем с 30% населения. Докажите, что существует пара жителей, которые в объединении знают не менее половины населения.

8. Дано несколько различных натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать не менее трети так, чтобы среди выбранных не нашлось тройки различных x, y, z таких, что $x + y = z$.