Усреднение

группа 10-1
03.10.2016

1. По кругу расставлено 100 чисел. Сумма всех чисел равна 1. Может ли сумма любых семи подряд идущих чисел быть отрицательна?

   Решение. Предположим, что может. Сложим все семёрки подряд идущих чисел, получим $7 < 0$. Противоречие.

2. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 14 раз.

   Решение. За каждое дежурство покрывается 6 пар, всего пар 45. Тогда сумма кратностей покрытий через 100 дежурств будет 600. Но тогда существует ребро, покрытое с кратностью не меньше $600/45 = 13.(3)$.

3. Есть два ожерелья, в каждом ожерелье по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Оксана хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое число совпадающих бусинок Оксана может гарантированно получить?

   Ответ: 100.

   Решение. Пример: одни бусы с чередующимися бусинками, другие состоят из двух блоков по 100 бусинок одного цвета.

   Оценка: приложим вторые бусы к первым всевозможными способами (а их 400, с учётом переворотов). Для каждой фиксированной бусинки первых бус 200 из этих 400 способов совмещают её с бусинкой того же цвета. Но тогда суммарное число совпадений цветов отдельных бусинок при всевозможных способах совмещения бус равно $200 \cdot 200$, а значит при каком-то способе можно обнаружить не меньше $200 \cdot 200/400 = 100$ совпадающих бусинок.

4. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые несколько из них перевести *вперёд*. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?

   Ответ: 24 часа.

   Решение. Оценка: очевидно, что минимальное суммарное время будет достигаться при переводе каких-то четырёх стрелок в положение пятой (а пятую не трогаем). Посчитаем сумму времён при всех описанных пяти способах перевода. Обозначим дуги между ближайшими стрелками $x_1, \ldots, x_5$. Тогда искомая сумма равна $\sum\limits_{i \in \mathbb{Z}_5} (x_{i+1} + 2x_{i+2} + 3x_{i+3} + 4x_{i+4}) = 10 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$. Сумма всех пяти суммарных времён перевода равна $10 \cdot 12$ часов, а значит хотя бы одно из времён не более 24 часов.

   Пример: если $x_1 = \ldots = x_5$, то все пять суммарных времён перевода равны 24 часам.

5. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале.

Решение. Будем рассматривать алгебраическую сумму весов гирь, причём веса гирь с правой чаши будут входить в сумму со знаком «+», а с левой — со знаком «−». А теперь сложим все эти суммы для всех подмножеств впущенных школьников (ясно, что для фиксированного подмножества школьников результат не зависит от того, в каком порядке школьники заходят в кабинет). Результатом сложения всех этих сумм будет 0, так как каждая отдельная гиря побывала на левой чаше столько же раз, сколько на правой (положение гири определяется чётностью количества присутствующих в классе школьников, написанных на этой гире, а сумма нечётных биномиальных коэффициентов равна сумме чётных). Для пустого подмножества алгебраическая сумма весов больше нуля (по условию), а значит для некоторого подмножества одна должна быть меньше нуля. Именно для этого подмножества школьников перевесит противоположная чаша.