Линейная алгебра в комбинаторике, краткие решения

группа 10-1

29.09.2016

Во всех задачах, кроме последней, объектам из задачи будем естественным образом сопоставлять векторы из 0 *и* 1 *над разными полями.*

1. Дана таблица, в которой $n+1$ строка и n столбцов. В некоторых клетках таблицы сидят зайчики (не более одного в клетке). Докажите, что можно выбрать непустой набор строк так, чтобы в каждом столбце в выбранных строках находилось чётное число зайчиков.

   Решение. Каждая строка — элемент $\mathbb{Z}_2^n$ (есть зайчик — пишем 1, нет — пишем 0). Любые $n+1$ векторов в пространстве размерности n линейно зависимы, а значит существует нетривиальная линейная комбинация со значением $\mathbf{0}$. Так как мы работаем в поле $\mathbb{Z}_2$, эта комбинация есть просто сумма некоторых строк. Их сумма равна $\mathbf{0}$, а значит в каждом столбце в этих строках чётное число зайчиков.

2. Есть доска 100×100 с изначально выключенными лампочками в клетках. За одну операцию разрешается поменять состояния всех лампочек в любом *кресте* (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций всю доску можно включить?

   Ответ: 10000.

   Решение. Каждое состояние доски — это вектор из 0 и 1 пространства V размерности 10000 над полем $\mathbb{Z}_2$. Для каждого креста заведём свой вектор, в котором в клетках этого креста будут стоять 1, а во всех остальных — 0. Применение операции к кресту равносильно прибавлению соответствующего вектора к текущему состоянию доски. Переформулировка вопроса задачи звучит так: выразите вектор из всех единиц в виде суммы наименьшего числа векторов-крестов.

   Пример устроен очень просто: если сложить все векторы-кресты, то состояние каждой лампочки переменится 199 раз, вся доска включится. Если бы нам удалось показать, что векторы-кресты образуют базис всего пространства состояний, то оценка тривиально следовала бы из единственности разложения по базису: в любом способе включить все лампочки пришлось бы каждый крест дёргать нечётное число раз, то есть хотя бы один. Докажем, что векторы-кресты образуют базис, причём сделаем это двумя способами. Так как их количество совпадает с размерностью пространства, то

   а) достаточно доказать линейную независимость векторов-крестов. От противного: пусть какой-то вектор-крест $\mathbf{v}_T$ выражается через остальные. Но заметим, что вектор-крест $\mathbf{v}_T$ в своём кресте T меняет состояния нечётного числа (199) лампочек, а все остальные векторы-кресты в том же кресте T — чётного (2 или 100). Противоречие.

   б) достаточно доказать, что всё пространство порождается линейными комбинациями векторов-крестов. Научимся для этого менять состояние ровно одно лампочки в любой клетке (i, j). Это делается так: нужно сделать 201 операцию относительно всех крестов, содержащих (i, j). Тогда все лампочки поменяют своё состояние ровно 2 (вне креста (i, j)), 100 (на кресте (i, j)) или 199 (сама клетка (i, j)) раз. Если мы можем менять состояние любой отдельной лампочки, то можно получить все состояния доски.

3. Имеется $n + 1$ непустых подмножеств n-элементного множества. Докажите, что ненулевую часть из них можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы объединение красных подмножеств совпадало с объединением синих.

   Решение. Закодируем подмножества векторами из 0 и 1 пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда эти векторы линейно зависимы и есть нетривиальная линейная комбинация, равная $\mathbf{0}$. Слагаемые с положительными коэффициентами будем называть красными, а с отрицательными — синими. Синие слагаемые перенесём в правую часть:

$$\lambda_{i_1}\mathbf{v}_{i_1} + \lambda_{i_2}\mathbf{v}_{i_2} + \ldots = \lambda_{j_1}\mathbf{v}_{j_1} + \lambda_{j_2}\mathbf{v}_{j_2} + \ldots$$

Теперь все коэффициенты λ_s положительны. Ненулевые координаты суммы слева соответствуют объединению красных множеств, аналогично для синих. Но эти суммы равны (и не пусты, легко видеть), а значит объединение красных множеств совпадает с объединением синих.

4. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники по первичным балам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geqslant k$.

   Решение. Каждый участник — это вектор из нулей или единиц пространства $\mathbb{R}^n$, и таких векторов k. В предположении противного ($k > n$) векторы линейно зависимы. Как и в предыдущей задаче, перенесём слагаемые этой линейной комбинации с отрицательными коэффициентами в правую часть.

   $$\lambda_{i_1}\mathbf{v}_{i_1} + \lambda_{i_2}\mathbf{v}_{i_2} + \ldots = \lambda_{j_1}\mathbf{v}_{j_1} + \lambda_{j_2}\mathbf{v}_{j_2} + \ldots$$

   Пора разобраться с системой оценивания. Обозначим набор весов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Рассмотрим функцию

   $$\mu(\mathbf{x}) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_n x_n,$$

   которая есть результат участника с вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ участника. Видно, что функция $\mu(\mathbf{x})$ линейная, то есть удовлетворяет тождеству $\mu(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\mu(\mathbf{x}) + b\mu(\mathbf{y})$ для любых чисел a, b и векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

   Интерпретация основного условия задачи такова: с помощью разных линейных функций μ можно как угодно упорядочить числа $\mu(\mathbf{v}_1), \ldots, \mu(\mathbf{v}_k)$. Нам мешает этого добиться тождество

   $$\lambda_{i_1}\mu(\mathbf{v}_{i_1}) + \lambda_{i_2}\mu(\mathbf{v}_{i_2}) + \ldots = \lambda_{j_1}\mu(\mathbf{v}_{j_1}) + \lambda_{j_2}\mu(\mathbf{v}_{j_2}) + \ldots$$

   Не умаляя общности, сумма коэффициентов в левой части не меньше, чем в правой. Но тогда не получится сделать так, чтобы все $\mu(\mathbf{v}_{i_s})$ в левой части были больше всех $\mu(\mathbf{v}_{j_t})$ в правой. Противоречие.

5. К каждой вершине графа прикручена лампочка, изначально все лампочки выключены. За один раз можно выбрать любую вершину графа и поменять все состояния лампочек в ней самой и во всех её соседях на противоположные. *Включить граф* $\Leftrightarrow$ включить все лампочки.

   а) Иван умеет включать граф за x операций, а Василиса — за t. Докажите, что $|x - t|$ чётно.

   б) Докажите, что граф вообще можно включить.

   Решение. Параметризуем все состояния графа векторами из 0 или 1 надо полем $\mathbb{Z}_2$ (размерность равна числу вершин графа). Векторы-переключения обозначим $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Ну то есть у вектора $\mathbf{v}_i$ единички стоят на местах, соответствующих вершине графа v_i и всем её соседям.

   `Утверждение:` сумма нечётного числа векторов-переключений не может быть равна $\mathbf{0}$. Предположим противное, рассмотрим индуцированный подграф на вершинах, соответствующих нашим векторам, а про остальной граф временно забудем. Степень каждой вершины внутри этого подграфа нечётна, так как к концe её состояние не изменилось и один раз мы тыкнули в саму вершину. Но теперь у нас есть подграф с нечётным числом вершин нечётной степени, а так не бывает. Противоречие.

   Пункт а) тривиально следует из утверждения, достаточно сделать все $x + t$ операций вместе.

`Лемма`: если в линейном пространстве V над полем $\mathbb{K}$ вектор $\mathbf{e}$ не лежит в подпространстве $\mathcal{L}$, то существует такая линейная функция $\mu\colon V \to \mathbb{K}$, что $\mu(\mathcal{L}) = 0$ и $\mu(\mathbf{e}) \neq 0$.

`Доказательство леммы`: возьмём произвольный базис $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ подпространства $(k < n)$, добавим к нему вектор $\mathbf{e}$ и дополним это всё до базиса всего пространства. Любая линейная функция в построенном базисе в координатах записывается формулой $\mu(\mathbf{v}) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_n x_n$, где $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Положим $\mu_{k+1} = 1$, а все остальные $\mu_i = 0$, такая функция подойдёт.

Замечание к доказательству леммы: одни и те же векторы или линейные функции можно записывать в разных системах координат. В доказательстве леммы функция μ мило выглядит в специально построенном базисе. В исходном базисе она будет некоторой линейной функцией, про коэффициенты которой ничего не понятно.

В пункте б) необходимо доказать, что вектор $\mathbf{e}$ из всех единичек лежит в линейной оболочке $\mathcal{L}$ векторов-переключений. Докажем это от противного.

Рассмотрим линейную функцию μ из леммы для $\mathcal{L}$ и $\mathbf{e}$. Запишем μ в координатах:

$$\mu(\mathbf{v}) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_n x_n,$$

где $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Раз $\mu(\mathbf{e}) \neq 0$, то $\mu(\mathbf{e}) = 1$, а значит нечётное число коэффициентов μ_i равно 1. Рассмотрим подграф с вершинами, соответствующими ненулевым коэффициентам μ_i. Мы только что выяснили, что в нём нечётное число вершин. Для каждого вектора-переключения $\mathbf{v}_i$ по построению μ выполнено $\mu(\mathbf{v}_i) = 0$, а значит все вершины рассматриваемого подграфа имеют нечётную степень внутри этого подграфа! Это потому что $\mu(\mathbf{v}_i)$ есть просто чётность числа переключенных вершин внутри подграфа. И вновь получился подграф в нечётным числом вершин нечётной степени, противоречие.

6. У Васи есть строка $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ из p остатков по модулю p ($p > 2$ — простое), где индексы переменных — тоже остатки. За одну операцию может выбрать произвольный остаток a и заменить одновременно все элементы x_i строки по правилу $x'_i = x_i - x_{i+a}$. Сколько различных строк может получить Вася через 100 ходов, если он может варьировать начальную строку и параметр a на каждом ходе?

   Вернёмся к этой замечательной задаче через несколько занятий.