

Линейная алгебра в комбинаторике

группа 10-1

29.09.2016

1. Дана таблица, в которой $n+1$ строка и n столбцов. В некоторых клетках таблицы сидят зайчики (не более одного в клетке). Докажите, что можно выбрать непустой набор строк так, чтобы в каждом столбце в выбранных строках находилось чётное число зайчиков.
2. Есть доска 100×100 с изначально выключенными лампочками в клетках. За одну операцию разрешается поменять состояния всех лампочек в любом *кресте* (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций всю доску можно включить?
3. Имеется $n + 1$ непустых подмножеств n -элементного множества. Докажите, что ненулевую часть из них можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы объединение красных подмножеств совпадало с объединением синих.
4. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники по первичным балам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geq k$.
5. К каждой вершине графа прикручена лампочка, изначально все лампочки выключены. За один раз можно выбрать любую вершину графа и поменять все состояния лампочек в ней самой и во всех её соседях на противоположные. *Включить граф* \Leftrightarrow включить все лампочки.
 - а) Иван умеет включать граф за x операций, а Василиса — за t . Докажите, что $|x - t|$ чётно.
 - б) Докажите, что граф вообще можно включить.
6. У Васи есть строка $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ из p остатков по модулю p ($p > 2$ — простое), где индексы переменных — тоже остатки. За одну операцию может выбрать произвольный остаток a и заменить одновременно все элементы x_i строки по правилу $x'_i = x_i - x_{i+a}$. Сколько различных строк может получить Вася через 100 ходов, если он может варьировать начальную строку и параметр a на каждом ходе?