

# Линейная алгебра в комбинаторике

группа 10-1

29.09.2016

1. Дана таблица, в которой  $n+1$  строка и  $n$  столбцов. В некоторых клетках таблицы сидят зайчики (не более одного в клетке). Докажите, что можно выбрать непустой набор строк так, чтобы в каждом столбце в выбранных строках находилось чётное число зайчиков.
2. Есть доска  $100 \times 100$  с изначально выключенными лампочками в клетках. За одну операцию разрешается поменять состояния всех лампочек в любом *кресте* (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций всю доску можно включить?
3. Имеется  $n + 1$  непустых подмножеств  $n$ -элементного множества. Докажите, что ненулевую часть из них можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы объединение красных подмножеств совпадало с объединением синих.
4. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады)  $n$  тестовых вопросов, ЕГО пишут  $k$  участников. Известно, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники по первичным балам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что  $n \geq k$ .
5. К каждой вершине графа прикручена лампочка, изначально все лампочки выключены. За один раз можно выбрать любую вершину графа и поменять все состояния лампочек в ней самой и во всех её соседях на противоположные. *Включить граф*  $\Leftrightarrow$  включить все лампочки.
  - а) Иван умеет включать граф за  $x$  операций, а Василиса — за  $t$ . Докажите, что  $|x - t|$  чётно.
  - б) Докажите, что граф вообще можно включить.
6. У Васи есть строка  $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$  из  $p$  остатков по модулю  $p$  ( $p > 2$  — простое), где индексы переменных — тоже остатки. За одну операцию может выбрать произвольный остаток  $a$  и заменить одновременно все элементы  $x_i$  строки по правилу  $x'_i = x_i - x_{i+a}$ . Сколько различных строк может получить Вася через 100 ходов, если он может варьировать начальную строку и параметр  $a$  на каждом ходе?