Веса, краткие решения

группа 10-1

26.09.2016

1. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько фишек (возможно, по нескольку в одной клетке). Расположение фишек называется *конечным*, если в этом состоянии невозможно выполнить операцию.

   а) За одну операцию разрешается снять две фишки с клетки с номером k и добавить одну в клетку с номером $k+1$. Докажите, что конечное состояние не зависит от порядка операций.

   б) За одну операцию разрешается снять по одной фишке с клеток с номерами k и $k+1$ и добавить фишку в клетку с номером $k+2$. Докажите, что все конечные состояния, в которых на каждой клетке лежит не более одной фишки, одинаковы.

   Решение. а) Пусть фишка, лежащая в клетке с номером k, имеет вес 2^k. Тогда операция не меняет сумму весов, а финале получится двоичная запись исходной суммы весов. Двоичная запись единственна, так как $2^n > 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots$ б) Пусть фишка, лежащая в клетке с номером k, имеет вес F_k (число Фибоначчи). Тогда операция не меняет сумму весов, а финале получится запись исходной суммы весов в фибоначчиевой системе счисления. Такая запись единственна, так как $F_n > F_{n-1} + F_{n-3} + F_{n-5} + \dots$ Другое решение: назначим вес фишке в клетке с номером k равный φ^k, где φ — *золотое сечение* (положительный корень уравнения $\varphi^2 = \varphi + 1$). Сумма весов не меняется, единственность записи обеспечивается неравенством $\varphi^n > \varphi^{n-1} + \varphi^{n-3} + \varphi^{n-5} + \dots$

2. У каждого депутата парламента Табулистана не больше 20 врагов среди депутатов. Их случайно делят на Большую и Малую палаты. Хочется, чтобы у каждого депутата Большой палаты было не больше 15 врагов в этой палате, а у каждого депутата Малой — не больше 5. Каждый день одного депутата, нарушающего это правило, перемещают в другую палату. Докажите, что этот процесс однажды завершится.

   Решение. Для каждого разбиения парламента на две палаты посчитаем сумму числа рёбер в Большой палате и утроенного числа рёбер в Малой. Легко видеть, что эта величина падает с каждой операцией и принимает лишь конечное число значений.

3. Можно ли за круглым столом рассадить 12 человек и поставить 28 бутылок на стол с условием, чтобы между любыми двумя людьми стояла бутылка?

   Ответ. Нет.

   Решение. Каждой диагонали припишем вес $1/\ell$, где ℓ — минимальное расстояние по кругу между концами диагонали. Например, веса сторон 12-угольника равны 1, веса главных диагоналей равны 1/6. Ключевое наблюдение: суммарный вес диагоналей, накрытых одной бутылкой, не превосходит 1. Сумма весов всех диагоналей равна $12 \cdot (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + 6 \cdot \frac{1}{6} = 28.4 > 28$.

4. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами (i, j) и добавить по фишке в узлы $(i+1, j)$, $(i, j+1)$; при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел.

   а) Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми.

   б) Докажите, что если изначально в узле $(0, 0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат.

Решение. Фишке в узле (i, j) назначим вес $2^{-(i+j+1)}$. Сумма весов не меняется при операциях. Если бы вообще все узлы были забиты фишками, то сумма весов была бы

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{k}{2^k}+\ldots=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots)+(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots)+(\ldots)+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=2.$$

В пункте а) для того чтобы освободить эти три узла (у фишек там сумма весов 1), придётся заполонить вообще все остальные узлы, которых бесконечное число. В пункте б) помогает дополнительное наблюдение: на краю сетки всегда остаются ровно две фишки. Начальный вес равен 1/2, а освободить нам необходимо $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}=\frac{11}{8}$ веса в уголке и ещё хотя бы $2\cdot(\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots)=\frac{1}{8}$ веса ко краям сетки. Но тогда опять должны быть заполнены все оставшиеся узлы, а их бесконечное число.

5. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

   Решение. Каждому камню назначим вес обратный к числу камней в кучке, в которой он лежит. Тогда сумма весов до перекладывания $(= N)$ больше суммы весов после перекладывания $(= n)$. Следовательно, вес хотя бы одного камня уменьшился, что и требовалось доказать.

6. В ряд стоят $n > 1$ стаканов дном вверх. За одну операцию разрешается выкинуть любой стакан, стоящий дном вверх, перевернуть двух его соседей и сдвинуть ряд (крайние стаканы выкидывать нельзя, у них нет двух соседей). Докажите, что такими операциями можно оставить на столе два стакана тогда и только тогда, когда $n-1$ не делится на 3.

   Комментарий к решению: обычно в задачах удаётся назначить вещественные веса элементам множества, а вес множества определяется как сумма весов его элементов. Если попытаться каждому состоянию стакана назначить вес, а ряду из стаканов — сумму весов, то ничего не выйдет, так как существуют неэквивалентные ряды, отличающиеся лишь перестановкой, а сложение вещественных чисел коммутативно, т. е. не зависит от порядка слагаемых. Мораль: надо попробовать определить веса со значениями не во множестве вещественных чисел, а в какой-нибудь некоммутативной группе.

   Решение. Для стакана дном вверх заведём перестановку множества из трёх элементов $\alpha = (1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1)$; для стакана дном вниз — $\beta = (1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 3)$. Легко проверить, что выполнены соотношения $\alpha\circ\alpha\circ\alpha = \beta\circ\beta$, $\alpha\circ\alpha\circ\beta = \beta\circ\alpha$, $\beta\circ\alpha\circ\alpha = \alpha\circ\beta$, $\beta\circ\alpha\circ\beta = \alpha\circ\alpha$, а значит операция из условия не меняет композиции всех перестановок, соответствующих ряду стаканов. Кроме того, чётность числа стаканов вниз дном постоянна, а значит в конце значение инварианта будет либо α^2, либо $\beta^2 = id$. Для того, чтобы одно из конечных состояний было достижимо, необходимо $\alpha^n = \alpha^2$ либо $\alpha^n = id$, что совпадает с ограничениями из условия.

   Пример получается легко по индукции: если пять стаканов стоят дном вверх, легко за три операции избавиться от трёх по середине. База $n = 2$ и $n = 3$ очевидна.