Веса

группа 10-1
26.09.2016

1. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько фишек (возможно, по нескольку в одной клетке). Расположение фишек называется *конечным*, если в этом состоянии невозможно выполнить операцию.

   а) За одну операцию разрешается снять две фишки с клетки с номером k и добавить одну в клетку с номером $k+1$. Докажите, что конечное состояние не зависит от порядка операций.

   б) За одну операцию разрешается снять по одной фишке с клеток с номерами k и $k+1$ и добавить фишку в клетку с номером $k+2$. Докажите, что все конечные состояния, в которых на каждой клетке лежит не более одной фишки, одинаковы.

2. У каждого депутата парламента Табулистана не больше 20 врагов среди депутатов. Их случайно делят на Большую и Малую палаты. Хочется, чтобы у каждого депутата Большой палаты было не больше 15 врагов в этой палате, а у каждого депутата Малой — не больше 5. Каждый день одного депутата, нарушающего это правило, перемещают в другую палату. Докажите, что этот процесс однажды завершится.

3. Можно ли за круглым столом рассадить 12 человек и поставить 28 бутылок на стол с условием, чтобы между любыми двумя людьми стояла бутылка?

4. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами (i, j) и добавить по фишке в узлы $(i+1, j)$, $(i, j+1)$; при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел.

   а) Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми.

   б) Докажите, что если изначально в узле $(0, 0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат.

5. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

6. В ряд стоят $n > 1$ стаканов дном вверх. За одну операцию разрешается выкинуть любой стакан, стоящий дном вверх, перевернуть двух его соседей и сдвинуть ряд (крайние стаканы выкидывать нельзя, у них нет двух соседей). Докажите, что такими операциями можно оставить на столе два стакана тогда и только тогда, когда $n-1$ не делится на 3.