Введение в линейную алгебру, краткие решения

группа 10-1
22.09.2016

1. Какие из следующих множеств являются векторными пространства относительно естественных операций? (Предъявите табличку с ответами «да» или «нет».) *С ответами.*
   0. Векторы на плоскости над $\mathbb{R}$. (+)
   1. $\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{R}$. (−), *сломалось умножение.*
   2. $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$. (+)
   3. Множество из одного элемента $\{\mathbf{0}\}$ над $\mathbb{K}$. (+)
   4. Строки из 100 элементов $\mathbb{K}$ над $\mathbb{K}$. (+)
   5. Бесконечные последовательности вещественных чисел над $\mathbb{R}$. (+)
   6. Ограниченные бесконечные последовательности вещественных чисел над $\mathbb{R}$. (+)
   7. Монотонные бесконечные последовательности вещественных чисел над $\mathbb{R}$. (−)
   8. Сходящиеся бесконечные последовательности вещественных чисел над $\mathbb{R}$. (+)
   9. Периодические бесконечные последовательности вещественных чисел над $\mathbb{R}$. (+)
   10. Бесконечные последовательности $F_n \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ над $\mathbb{R}$. (+)
   11. Многочлены с коэффициентами из $\mathbb{K}$ над $\mathbb{K}$. (+)
   12. $\mathbb{K}$-многочлены степени 100 над $\mathbb{K}$. (−), *при сложении степень может упасть.*
   13. Функции $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$. (−), *сломалось умножение.*
   14. Функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ над $\mathbb{Q}$. (+)
   15. Множество решений однородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{K}$ над $\mathbb{K}$. (+)

2. Выражение вида $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k$ называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Линейная комбинация *тривиальна*, если все $\lambda_i = 0$. Набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ называется *линейно зависимым*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов со значением $\mathbf{0}$. Докажите, что набор векторов линейно зависим тогда и только тогда, когда один из векторов этого набора выражается как линейная комбинация остальных.

   Решение. Пусть $\lambda_i \neq 0$, тогда выразим $\mathbf{v}_i$ через остальные: $\mathbf{v}_i = -\lambda_i^{-1}(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k)$. Обратно, если $\mathbf{v}_i = \mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \mu_k\mathbf{v}_k$, то искомая комбинация имеет вид

   $$\mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\mathbf{v}_2 + \ldots + (-1)\mathbf{v}_i + \ldots + \mu_k\mathbf{v}_k = 0.$$

3. (***Основная лемма о линейной зависимости.***) Пусть $m < k$, и каждый из векторов набора $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ выражается как линейная комбинация векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$. Докажите, что векторы $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ линейно зависимы.

   Решение. Запишем выражение с неопределёнными коэффициентами $\mathfrak{L} = x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + x_k\mathbf{w}_k$, подставим туда вместо всех $\mathbf{w}_i$ их выражения $\mathbf{w}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{im}\mathbf{v}_m$ через линейные комбинации векторов $\mathbf{v}_j$ и приведём подобные. В результате получим что-то вроде

   $$\mathfrak{L} = x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + x_k\mathbf{w}_k = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{k1}x_k)\mathbf{v}_1 + (\ldots)\mathbf{v}_2 + \ldots + (a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{km}x_k)\mathbf{v}_m.$$

   Мы хотим подобрать такой нетривиальный набор коэффициентов $x_1, \ldots, x_k$, чтобы $\mathfrak{L}$ занулилось. Для этого достаточно занулить все коэффициенты перед $\mathbf{v}_i$. Но тогда возникнет однородная система из m линейных уравнений на k неизвестных, которая всегда имеет ненулевое решение (так как $m < k$).

4. *Подпространством* линейного пространства V называется его любое непустое подмножество W, само являющееся линейным пространством относительно индуцированных операций. *На самом деле достаточно проверить, что результаты операций с элементами W всегда лежат внутри W, а аксиомы будут выполнены автоматически.* Докажите, что пересечение любого семейства подпространств — вновь подпространство.

Решение. Рассмотрим два любых элемента из пересечения. Эти элементы лежат в каждом подпространстве, но тогда их сумма лежит в каждом подпространстве, а значит и в пересечении. Аналогично проверяется замкнутость относительно умножения на число.

5. Докажите, что три приведённых ниже определения эквивалентны:
1. *Линейной оболочкой* набора векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ называется множество значений всевозможных линейных комбинаций этого набора.
2. *Линейной оболочкой* набора векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ называется пересечение всех подпространств, содержащих этот набор.
3. *Линейной оболочкой* набора векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ называется минимальное по включению подпространство, содержащее этот набор.
Обозначение: $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Решение. 2 и 3 эквивалентны и это легко следует из предыдущей задачи. Множество линейных комбинаций само образует пространство $\mathcal{K}$ (сумма лин. комбинаций — лин. комбинация, результат умножения на число — тоже). $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ из минимальности $\mathcal{L}$. Но $\mathcal{L}$ — пространство, и оно должно содержать любые лин. комбинации своих элементов, т. е $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$.

Комментарий: линейная оболочка определена для подмножества пространства, не обязательно конечного. Определения 2 и 3 работают всегда. Определение 1 тоже осмысленно и в случае бесконечного подмножества: надо рассматривать всевозможные конечные линейные комбинации элементов этого подмножества.

6. а) Известно, что набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ линейно независим, но если к этому набору добавить любой вектор v, то условие линейной независимости нарушится. Докажите, что эти векторы своими линейными комбинациями порождают всё пространство.

   б) Известно, что набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ своими линейными комбинациями порождает все пространство, но при этом он теряет это свойство при удалении из него любого вектора. Докажите, что этот набор линейно независим.

Базисом пространства называется любой максимальный по включению линейно независимый набор векторов. Эквивалентное определение: *базисом* называется любой минимальный по включению набор векторов, порождающий линейными комбинациями всё пространство.

Решение. а) Если какой-то вектор не выражается, через исходные, то тогда его можно добавить к исходному набору и получить больший линейно независимый набор. б) Если они зависимы, то тот вектор, которые выражается через остальные, можно безболезненно удалить.

7. (***Определение размерности.***) Петя и Коля независимо друг от друга набирают векторы одного и того же пространства. Каждый из них имеет изначально пустой набор векторов. Затем они шаг за шагом добавляют в свой набор по одному новому вектору с условием, чтобы полученный набор был всегда линейно независимым. Если такого вектора нет, они останавливаются Докажите, что как бы они ни действовали, они остановятся на одном и том же шаге либо не остановятся никогда.

Размерностью $\dim V$ линейного пространства V называется количество векторов в любом его базисе. Если у пространства нет конечных базисов, то оно имеет бесконечную размерность.

Решение. Прямо следует из основной леммы о линейной зависимости.

Комментарий: попутно можно заметить, что в конечномерном пространстве любой линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса.

8. Найдите размерности всех пространств из задачи 1.

Ответ. (1) — 2, (3) — 0, (4) — 100, (10) — 2, (15) — конечная, зависит от системы. Все остальные пространства задачи 1 бесконечномерны.

9. *Суммой* подпространств V_1, V_2 пространства V (обозначение $V_1 + V_2$) назовём линейную оболочку их объединения. Докажите, что $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$.

   Решение. Рассмотрим любой базис $\mathbf{u}_i$ пространства $V_1 \cap V_2$. Дополним его до базиса V_1 векторами $\mathbf{v}_j$. А теперь дополним опять $\mathbf{u}_i$, но до базиса V_2 векторами $\mathbf{w}_k$ (любой из этих трёх наборов может оказать пустым). Докажем, что все три набора векторов вместе формируют базис $V_1 + V_2$. 1. Этот тройной набор порождает всё $V_1 + V_2$, так как все его элементы имеют вид $\lambda_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2$, где $\mathbf{r}_1 \in V_1$, $\mathbf{r}_2 \in V_2$, а сами векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ выражаются через наш тройной набор.

   Докажем теперь линейную независимость этого набора. Пусть есть нетривиальная нулевая линейная комбинация. Перенесём все $\mathbf{w}_i$ в правую часть:

$$a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_A\mathbf{u}_A + b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_B\mathbf{v}_B = c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_c\mathbf{w}_c = \mathbf{s}.$$

   Вектор слева лежит в V_1, вектор справа — в V_2, т. е. в $\mathbf{s} \in V_1 \cap V_2$. Тогда $\mathbf{s}$ представим как линейная комбинация $\mathbf{u}_i$. Но из единственности разложения s в пространстве V_2 по базису $\{\mathbf{u}_i\} \cup \{\mathbf{w}_k\}$ получаем, что все c_k равны нулю. Но тогда $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, а из линейной независимости $\{\mathbf{u}_i\} \cup \{\mathbf{v}_j\}$ извлекаем, то все a_i и b_j так же нулевые. Противоречие.

   Искомый набор линейно независим и порождает всё пространство, а значит он — базис пространства. Построили по базису в каждом подпространстве задаче, ну и всё:

$$(A + B) + (A + C) = (A + B + C) + A.$$

10. *Коразмерностью* подпространства $V_1 \subseteq V$ назовём величину $\dim V - \dim V_1$. Докажите, что коразмерность $V_1 \cap V_2$ не превосходит суммы коразмерностей подпространств V_1, V_2.

    Решение. 1) предыдущая задача; 2) тривильное включение $V_1 + V_2 \subset V$.

    $\dim V - \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V - \dim V_1 + \dim(V_1 + V_2) - \dim V_2 \leqslant \dim V - \dim V_1 + \dim V - \dim V_2.$