Введение в линейную алгебру

группа 10-1

22.09.2016

Пусть $\mathbb{K}$ — *поле*, нас снова будут интересовать лишь примеры $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$. Операции внутри поля будут обозначаться символами «$+_\mathbb{K}$», «$\cdot_\mathbb{K}$», а элементы $\lambda \in \mathbb{K}$ называться *числами.*

Определение. *Линейный (векторным) пространством* над $\mathbb{K}$ называется множество V (элементы $\mathbf{v} \in V$ которого будут называться *векторами*), снабжённое операциями сложения векторов «$+_V$» и умножения числа на вектор «$\cdot_V$», удовлетворяющими следующим свойствам (аксиомам):

- ⋆ $(V, +_V)$ — *коммутативная (абелева) группа*: сложение векторов ассоциативно и коммутативно; существует нейтральный по сложению вектор $\mathbf{0}$; для каждого вектора $\mathbf{v}$ существует обратный по сложению $-\mathbf{v}$.
- ⋆ Дистрибутивность (левая и правая): $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v}$, $\lambda \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{w}$.
- ⋆ Ассоциативность разным умножений и унитарность: $(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v}), 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Индексы операций опущены, но по аргументам легко догадаться, о каком именно сложении или умножении идёт речь. В дальнейшем будет опущен также знак умножения.

1. Какие из следующих множеств являются векторными пространства относительно естественных операций? (Предъявите табличку с ответами «да» или «нет».)
   0. Векторы на плоскости над $\mathbb{R}$.
   1. $\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{R}$.
   2. $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$.
   3. Множество из одного элемента $\{\mathbf{0}\}$ над $\mathbb{K}$.
   4. Строки из 100 элементов $\mathbb{K}$ над $\mathbb{K}$.
   5. Бесконечные последовательности вещественных чисел над $\mathbb{R}$.
   6. Ограниченные бесконечные последовательности вещественных чисел над $\mathbb{R}$.
   7. Монотонные бесконечные последовательности вещественных чисел над $\mathbb{R}$.
   8. Сходящиеся бесконечные последовательности вещественных чисел над $\mathbb{R}$.
   9. Периодические бесконечные последовательности вещественных чисел над $\mathbb{R}$.
   10. Бесконечные последовательности $F_n \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ над $\mathbb{R}$.
   11. Многочлены с коэффициентами из $\mathbb{K}$ над $\mathbb{K}$.
   12. Многочлены степени 100 с коэффициентами из $\mathbb{K}$ над $\mathbb{K}$.
   13. Функции $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$.
   14. Функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ над $\mathbb{Q}$.
   15. Множество решений однородной СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{K}$ над $\mathbb{K}$.

2. Выражение вида $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k$ называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Линейная комбинация *тривиальна*, если все $\lambda_i = 0$. Набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ называется *линейно зависимым*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов со значением $\mathbf{0}$. Докажите, что набор векторов линейно зависим тогда и только тогда, когда один из векторов этого набора выражается как линейная комбинация остальных.

3. (***Основная лемма о линейной зависимости.***) Пусть $m < k$, и каждый из векторов набора $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ выражается как линейная комбинация векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$. Докажите, что векторы $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ линейно зависимы.

4. *Подпространством* линейного пространства V называется его любое непустое подмножество W, само являющееся линейным пространством относительно индуцированных операций. *На самом деле достаточно проверить, что результаты операций с элементами W всегда лежат внутри W, а аксиомы будут выполнены автоматически.* Докажите, что пересечение любого семейства подпространств — вновь подпространство.

5. Докажите, что три приведённых ниже определения эквивалентны:
   1. *Линейной оболочкой* набора векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ называется множество значений всевозможных линейных комбинаций этого набора.
   2. *Линейной оболочкой* набора векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ называется пересечение всех подпространств, содержащих этот набор.
   3. *Линейной оболочкой* набора векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ называется минимальное по включению подпространство, содержащее этот набор.

   Обозначение: $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

6. а) Известно, что набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ линейно независим, но если к этом набору добавить любой вектор v, то условие линейной независимости нарушится. Докажите, что эти векторы своими линейными комбинациями порождают всё пространство.

   б) Известно, что набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ своими линейными комбинациями порождает все пространство, но при этом он теряет это свойство при удалении из него любого вектора. Докажите, что этот набор линейно независим.

   Базисом пространства называется любой максимальный по включению линейно независимый набор векторов. Эквивалентное определение: *базисом* называется любой минимальный по включению набор векторов, порождающий линейными комбинациями всё пространство.

7. (***Определение размерности.***) Петя и Коля независимо друг от друга набирают векторы одного и того же пространства. Каждый из них имеет изначально пустой набор векторов. Затем они шаг за шагом добавляют в свой набор по одному новому вектору с условием, чтобы полученный набор был всегда линейно независимым. Если такого вектора нет, они останавливаются Докажите, что как бы они ни действовали, они остановятся на одном и том же шаге либо не остановятся никогда.

   Размерностью $\dim V$ линейного пространства V называется количество векторов в любом его базисе. Если у пространства нет конечных базисов, то оно имеет бесконечную размерность.

8. Найдите размерности всех пространств из задачи 1.

9. *Суммой* подпространств V_1, V_2 пространства V (обозначение $V_1 + V_2$) назовём линейную оболочку их объединения. Докажите, что $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$.

10. *Коразмерностью* подпространства $V_1 \subseteq V$ назовём величину $\dim V - \dim V_1$. Докажите, что коразмерность $V_1 \cap V_2$ не превосходит суммы коразмерностей подпространств V_1, V_2.