Графы, часть 2, краткие решения

группа 10-1

19.09.2016

1. Пусть $k > 1$ — натуральное число. В графе степень каждой вершины не меньше k. Докажите, что в этом графе найдётся простой цикл длины не меньше, чем $k + 1$.

   Решение. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_s$ — самая длинная простая цепь в графе. Тогда все соседи v_1 лежат в ней, иначе можно удлинить эту цепь. Рассмотрим её соседа v_i с наибольшим индексом i. Из $\deg v_1 \geqslant k$ имеем $i \geqslant k + 1$. Искомый простой цикл $v_1, v_2, \ldots, v_i$.

2. (*Теорема Кёнига*)

   а) В прямоугольной таблице закрашено несколько клеток. *Рядом* будем называть столбец или строку. Докажите, что минимальное число рядов, которыми можно покрыть все закрашенные клетки, совпадает с максимальным числом не бьющих друг друга ладей, которые можно расставить в закрашенные клетки.

   б) Дан двудольный граф. *Вершинным покрытием* будем называть любое такое множество вершин W, что у каждого ребра хотя бы один из концов принадлежит W. *Паросочетание* — множество рёбер, не имеющих общих концов. Докажите, что число вершин минимального вершинного покрытия совпадает с числом рёбер в максимальном паросочетании.

   Решение. Ясно, что пункты а) и б) всего лишь две интерпретации одной и той же задачи (ряды — вершины графа, ладьи — рёбра), докажем сразу пункт б). Размер максимального паросочетания не больше размера минимального вершинного покрытия, так как нам нужно уметь покрывать вершинами хотя бы это паросочетание. Докажем неравенство в другую сторону.

   Рассмотрим любое минимальное вершинное покрытие A. Порвём все рёбра между вершинами из покрытия (дальше работаем только с порванным графом). Докажем, что для вершин $L \subset A$ покрытия, лежащих в левой доле, выполнено условие леммы Холла. Предположим противное: пусть нашлось подмножество $X \subset L$, множество Y друзей которого имеет меньшую мощность. Но тогда $(A \setminus X) \cup Y$ — вершинное покрытие с меньшим числом вершин (порванные рёбра покрыты с правой стороны, которую мы не трогали). Противоречие. Значит, условие леммы Холла выполнено и для L можно найти паросочетание. Аналогично для вершин покрытия в правой доле. Построено паросочетание размера не меньше минимального вершинного покрытия, а значит максимальное паросочетание тем более не меньше.

   На всякий случай приведём формулировку *леммы Холла*: если каждому подмножеству множества юношей в объединении нравится не меньше девушек, чем мощность рассматриваемого подмножества, то всех юношей можно переженить на различных девушках и каждому юноше будет нравиться его жена.

   Комментарий: возможны другие решения. Особенно популярны «передоказательства» леммы Холла методом чередующихся цепей или методом критических подмножеств.

3. Диаметр связного графа — наибольшее из расстояний между его вершинами. Пусть в связном графе диаметра d минимальная длина цикла равна $2d+1$ (хотя бы один цикл есть). Докажите, что степени всех вершин равны.

   Решение. `Лемма 1:` если две вершины графа соединены различными простыми путями, то из рёбер этих простых путей можно сложить простой цикл. Его длина, естественно, будет не больше суммы длин путей. Доказательство леммы: пойдём по этим путям, пока не дойдём до развилки A (она существует, так как пути различны; она может совпадать с самой первой вершиной путей). Найдём на оставшимся куске первого пути самую ближайшую по первому пути вершину B, лежащую также на втором пути (вершиной B может оказаться общий конец путей.) Тогда два куска первого и второго пути от A до B формируют искомый цикл. Лемма доказана.

Простые пути длины $\leqslant d$ будем называть *короткими*. `Следствие:` в графе из задачи любые две вершины соединены ровно одним коротким путём (условия на диаметр гарантирует нам существование, а условия на минимальный цикл — единственность).

`Лемма 2:` в графе из условия любые две вершины на расстоянии d имеют одинаковую степень. Доказательство леммы: соединим эти вершины коротким путём $v_0, v_1, \ldots, v_d$. Пусть v_0 имеет соседа $u \neq v_1$. Тогда короткий путь из u в v_d (предпоследнюю вершину которого обозначим за w) никакие не пересекается с $v_0, v_1, \ldots, v_d$, иначе возник бы простой цикл длины $< 2d+1$ (следует из доказательства леммы 1). Получилось, что каждому соседу $u \neq v_1$ вершины v_0 сопоставили соседа $w(u) \neq v_{d-1}$ вершины v_d. Это отображение инъективно, ведь если $w(u)$ совпало бы с $w(u')$, то вершины v_0 и w соединяли бы два различных коротких пути (через u и через u'). Инъективность влечёт неравенство $\deg v_0 \leqslant \deg v_d$, ну а из-за симметрии $\deg v_0 \geqslant \deg v_d$. Лемма доказана.

`Решение самой задачи:` рассмотри цикл длины $2d+1$. Из леммы 2 и взаимной простоты d и $2d+1$ следует, что все вершины в нём имеют одинаковую степень. Любая вершина графа имеет такую же степень: достаточно нарисовать кратчайший простой путь в этот цикл и, проехавшись по этому пути, найти вершину в цикле на расстоянии d (на всякий случай повторюсь: следствие из леммы 1 позволяет по одному известному короткому простому пути судить о расстоянии между вершинами).

4. В графе степень каждой вершины не меньше трёх. Докажите, что в этом графе существует цикл, длина которого не делится на три.

   Решение 1. Предположим противное. Среди всех «плохих» графов выберем наименьший по числу вершин. Он не лес, так как степени всех вершин не менее трёх. Найдём в нём простой цикл $C = v_1, v_2, \ldots, v_{3k}$.

   `Утверждение:` все простые пути, соединяющие v_i и v_j и не проходящие через другие вершины цикла, во-первых имеют длину, кратную трём, и во-вторых возможны только при $i \equiv j \pmod 3$. Доказательство утверждения: рассмотрим три простых пути от v_i в v_j: два из цикла и один из условия утверждения. Они не пересекаются по вершинам, а значит формируют три простых цикла, каждый из которых имеет длину, кратную трём. Но тогда простой перебор остатков показывает, что все три пути должны иметь длину, кратную трём. Утверждение доказано.

   Склеим цикл C в вершину v (т. е. вершины v_i уничтожим и заведём новую v, множеством соседей которой является объединение множеств неудалённых соседей всех вершин v_i). Тогда новый граф вновь удовлетворяет всем условиям: 1) кратных рёбер не возникло, так как у v_i и v_j не было общих соседей вне цикла (следствие из утверждения); 2) степень v хотя бы три, у каждой вершины цикла была хотя бы одна «лишняя» степень (несоседние в цикле v_i и v_j не соединены ребром, следствие из утверждения); 3) в новом графе все простые циклы, не содержащие v, по-прежнему имеют длину, кратную трём; 4) простые циклы, содержащие v, соответствуют простым путям из C в C, не задевающим C, в исходном графе и (следствие из утверждения) имеют длину, кратную трём. Противоречие, так как нам удалось уменьшить минимальный контрпример.

   Решение 2. Рассмотрим простой путь наибольшей длины, пусть это $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Тогда все соседи вершины v_1 лежат в этом пути и их хотя бы два (исключая v_2). Обозначим их v_i и v_j, $i < j$. Рассмотрим три цикла: $C_1 = v_1, \ldots v_i$, $C_2 = v_1, \ldots v_j$, $C_3 = v_1, v_i, \ldots v_j$. Тогда выполнено соотношение $|C_1| + |C_3| = |C_2| + 2$, а значит их длины не могут одновременно делиться на три.