Системы линейных уравнений, краткие решения

группа 10-1
15.09.2016

3. По кругу расставлены 2016 вещественных чисел. Известно, что суммы любых k подряд идущих равны. При каких k можно утверждать, что все числа равны?

   Ответ: при $(k, 2016) = 1$.

   Решение. Исходная система уравнений эквивалентна модифицированной системе $x_i = x_{i+k}$ $\forall i \in \mathbb{Z}_{2016}$ (вложенности множеств решений в обе стороны легко проверяются). Кузнечник прыгает по кругу $\mathbb{Z}_{2016}$ на расстояние k — известный сюжет. При $(k, 2016) = 1$ он пропрыгает всю окружность, и всем x_i придётся быть равными. При $(k, 2016) \neq 1$ окружность разобьётся ровно на $(k, 2016)$ траекторий. Модифицированная система говорит, что внутри траекторий все числа одинаковые, а больше никаких ограничений не накладывает. Но тогда внутрь разных траекторий можно положить различные числа.

4. (*Дискретное уравнение теплопроводности*) Имеется клетчатая таблица $(k+2) \times (l+2)$, в её граничных клетках («в рамочке») расставлены произвольные вещественные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times l$ можно единственным образом расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

   Решение. Сначала исследуем систему с нулевыми граничными условиями (т. е. вся рамочка заполнена нулями). Докажем от противного, что это система имеет только нулевое решение. Пусть существует ненулевое решение. Выберем максимальную по модулю чиселку. Заметим, что она должна быть окружена с четырёх сторон такими же чиселками в силу максимальности её модуля, а на границе она стоять вообще не может. Но тогда клетки, где стоит максимальное по модулю число, будут размножаться (каждый раз в четырёх направлениях), пока не дойдут до границы, где они стоять не могут. Противоречие.

   Мы имеем однородную систему kl уравнений на kl неизвестных, имеющую единственное решение. Но тогда такая же система, но с любой другой правой частью, также имеет единственное решение. А числа в рамочке как раз влияют только на правую часть.

5. Даны три однородных квадратичных многочлена с вещественными коэффициентами: $P(u, v), Q(u, v), R(u, v)$ (т. е. каждый из них имеет вид $Au^2 + Buv + Cv^2$). Докажите, что существует ненулевой однородный квадратичный многочлен $F(x, y, z)$, такой что $F(P(u, v), Q(u, v), R(u, v)) = 0$ при всех u, v.

   Решение. Запишем $F(P, Q, R) = x_1P^2 + x_2Q^2 + x_3R^2 + x_4PQ + x_5QR + x_6RP$. Теперь подставим наши конкретные многочлены $P(u, v), Q(u, v), R(u, v)$, раскроем скобки и приведём подобные по переменным u, v. Мы хотим, чтобы все коэффициенты при u^4, u^3v, u^2v^2, uv^3, v^4 после раскрытия всех скобок стали нулевыми. Это условие даст нам пять линейных уравнений на шесть неопределённых коэффициентов x_i, причём все эти уравнения будут однородны. В однородной системе неизвестных больше $\Rightarrow$ существует ненулевое решение.

6. Внутри отрезка $[0, 1]$ выбрали n различных точек. *Отмеченной* точкой назовём одну из n выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных. Докажите, что все точки рациональные.

   Решение. Предположим противное. Обозначим координаты точек $x_1 < \ldots < x_n$. Запишем все условия того, что каждая точка является серединой какого-то отрезка. Эти условия имеют вид $2x_j = x_i + x_k$, где обязательно $i < j < k$ (ещё разрешается, чтобы $x_i = 0$ или $x_k = 1$). А теперь посмотрим на эти выписанные условия как на систему уравнений относительно переменных x_i. Имеем n неизвестных и n уравнений. *На самом деле если задача вообще верна, то такая система обязана иметь единственное решение, потому что если решение зависит от параметра, то небольшой вариацией этого параметра можно добиться потери рациональности.*

   Рассмотрим соответствующую однородную систему (это означает, что во всех уравнениях, где стоял правый конец отрезка $[0, 1]$, его заменили на 0). Предположим, что у неё есть ненулевое решение. Выберем максимальное по модулю x_j, а если таких несколько, то среди них выберем x_j с максимальным индексом j. Но $2x_j = x_i + x_k$, $i < j < k$, а значит $x_j = x_i = x_k$ в силу максимальности модуля x_j. Но x_k не может быть переменной из-за максимальности индекса i и не может быть константой, так как константы в однородной системе нулевые. Противоречие.

   Однородная система имеет единственное решение, а значит и исходная тоже. Но все коэффициенты и константы исходной системы рациональны, хотя бы одно решение существует $\Rightarrow$ оно рационально. Противоречие с самым первым предположением противного.

7. В вершинах правильного 101-угольника расставлены единицы. За один ход разрешается выбрать четыре подряд стоящие числа, вычесть по 1 из двух средних и прибавить по 1 к двум крайним. Можно ли не более чем за 10000 таких ходов получить расстановку, в которой все числа, кроме одного, равны нулю?

Решение. Пронумеруем в порядке обхода по кругу наборы из четырёх последовательных вершин остатками (mod 101): $0, 1, 2, \ldots, 100$. Пусть x_i — число операций с i-ым набором. Тогда начальное и конечное состояние многоугольника приводят к системе уравнений $x_i - x_{i+1} - x_{i+2} + x_{i+3} = -1$ для всех $i \neq 99$, $x_{99} - x_{100} - x_0 + x_1 = 100$. Исследуем однородную версию этой системы: $y_i - y_{i+1} - y_{i+2} + y_{i+3} = 0$ при всех i. Её можно переписать в виде $y_i - y_{i+1} = y_{i+2} - y_{i+3}$, т. е. разности в парах через один равны. В силу того, что 101 нечётно, получим, что вообще все разности соседей равны (прошли по кругу). Но сумма всех разностей соседей равна 0, а значит вообще все y_i равны. Получаем однопараметрическое семейство решений однородной системы $y_i = t$, где t — параметр. Следовательно, у исходной системы либо нет решений вообще, либо множество решений также зависит от одного параметра: $x_i = \hat{x}_i + t$, где $\hat{x}_i$ — угаданное решение исходной системы. После того, как мы угадаем частное решение, нам останется лишь выбрать в этом явно описанном семействе неотрицательное целочисленное решение с наименьшим параметром t (и, следовательно, с наименьшим числом операций $\sum x_i$).

Надо угадать одно решение. *Я мог бы просто его выписать, но считаю не лишним поделиться эвристикой угадывания. Проведём в круге диаметр из вершинки, в которую мы пытаемся собрать все чиселки. «Вся задача» симметрична относительно этого диаметра, и все решения системы должны обладать той же симметрией, поэтому логично ожидать, что $x_i = x_{100-i}$. Далее, так как к решению можно прибавлять константу, то можно зафиксировать любую переменную, пусть $x_0 = 0$. Теперь все переменные начинают восстанавливаться однозначно: $x_1 - x_0 - x_0 + x_1 = 100 \Rightarrow x_1 = 50$, $x_0 - x_0 - x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = 49$ и т. д. Дальше нам по сути необходимо решить некоторую рекурренту, но вместо этого проще выписать первые чиселки и угадать закономерность: $x_0 = 0, x_1 = 50, x_2 = 50-1, x_3 = 100-2, x_4 = 100-4, x_5 = 150-6, x_6 = 150-9, x_7 = 200-12, x_8 = 200-16$.* Вот решение: $x_{2k} = 50k - k^2 = k(50-k), x_{2k+1} = 50(k+1) - k^2 - k = 50 + k(49-k)$. Желающие могут доказать эти формулы по индукции. Из формул ясно, что это и есть наименьшее целочисленное неотрицательное решение (так как $x_0 = 0$, а единственная свобода у нас в варировании параметра t).

Финальный шаг: посчитаем сумму ниже и сравним её с 10000. Оставим это в качестве упражнения.

$$\sum_{k=0}^{50}(50k - k^2) + \sum_{k=0}^{49}(50 + 49k - k^2).$$