Системы линейных уравнений

группа 10-1
15.09.2016

Рассмотрим *систему линейных уравнений* (далее СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Все a_i и b_i являются элементами некоторого *поля* $\mathbb{K}$ (нас будут интересовать примеры полей: $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$).
Две СЛУ называют *эквивалентными*, если у них в точности совпадают множества решений.
СЛУ называется *однородной*, если все $b_i = 0$.

1. Решите методом Гаусса следующие системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y + 5z \equiv 5 \pmod{11}, \\ 4x + y + 7z \equiv 4 \pmod{11}, \\ 3x + y + z \equiv 0 \pmod{11}. \end{cases}$$

2. Проанализировав метод Гаусса, докажите следующие утверждения о СЛУ:

   а) Если в **однородной** СЛУ неизвестных больше, чем уравнений, то она имеет решение, отличное от нулевого (следовательно, бесконечно много решений: ненулевое решение можно домножать на любую константу).

   б) Докажите, что если у СЛУ с рациональными коэффициентами существует вещественное решение, то у неё есть хотя бы одно рациональное решение.

   в) Пусть есть две СЛУ с одинаковой левой частью: одна однородная, другая — нет. Обозначим X_0 — множество решений однородной системы, а X — множество решений неоднородной. Пусть $X \neq \emptyset$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторое фиксированное решение неоднородной системы (т.е. $\mathbf{x} \in X$). Докажите, что $X_0 + \mathbf{x} = X$. Это равенство надо понимать так: если каждый элемент множества X_0 покоординатно сложить с $\mathbf{x}$, то получится в точности множество X.

   г) Некоторая однородная СЛУ с одинаковым числом уравнений и неизвестных имеет единственное решение. Докажите, что любая неоднородная СЛУ с такой же левой частью имеет единственное решение.

3. По кругу расставлены 2016 вещественных чисел. Известно, что суммы любых k подряд идущих равны. При каких k можно утверждать, что все числа равны?

4. (*Дискретное уравнение теплопроводности*) Имеется клетчатая таблица $(k+2) \times (l+2)$, в её граничных клетках («в рамочке») расставлены произвольные вещественные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times l$ можно единственным образом расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

5. Даны три однородных квадратичных многочлена с вещественными коэффициентами: $P(u,v), Q(u,v), R(u,v)$ (т. е. каждый из них имеет вид $Au^2 + Buv + Cv^2$). Докажите, что существует ненулевой однородный квадратичный многочлен $F(x,y,z)$, такой что $F(P(u,v), Q(u,v), R(u,v)) = 0$ при всех u, v.

6. Внутри отрезка $[0,1]$ выбрали n различных точек. *Отмеченной* точкой назовём одну из n выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных. Докажите, что все точки рациональные.

7. В вершинах правильного 101-угольника расставлены единицы. За один ход разрешается выбрать четыре подряд стоящие числа, вычесть по 1 из двух средних и прибавить по 1 к двум крайним. Можно ли не более чем за 10000 таких ходов получить расстановку, в которой все числа, кроме одного, равны нулю?