

Графы, краткие решения

группа 10-1

12.09.2016

1. В связном графе $n \geq 5$ вершин и $2n - 1$ ребро. Докажите, что в нём можно найти простой цикл, после уничтожения всех рёбер которого граф не потеряет связность.

Решение. Зафиксируем любое остовное дерево, покрасим его рёбра в красный цвет. Оставшиеся n рёбер покрасим в синий. Заметим, что существует синий цикл, так как в синем графе n вершин и n рёбер (если цикла нет, то во всех компонентах связности рёбер меньше, чем вершин, противоречие). При удалении синего цикла исходный граф связность не потеряет, так как связность обеспечена красными остовным деревом.

Мораль: дерево — это не только минимальный связный граф, но и максимальный ациклический.

2. На тренинг по личностному росту пришло 30 человек. Оказалось, что любых пятерых можно посадить за круглый стол с условием, чтобы рядом сидящие были знакомы. Какое минимальное количество пар знакомых может присутствовать на тренинге?

Решение. Рёбрами будем соединять пары **незнакомых** и пытаться минимизировать число рёбер. Ясно, что тогда степень каждой вершины не превосходит 2, так как иначе можно было бы выбрать вершину, три смежные с ней и ещё одну любую в качестве пятерки людей, которых посадить за круглый стол не удастся. Мгновенно получаем оценку: рёбер не больше 30. В качестве примера подойдёт большой цикл по всем вершинам. Небольшим перебором можно убедиться в корректности примера.

Мораль: с антиграфом иногда работать проще.

3. Про ориентированный граф известно, что не существует маршрута, проходящего через все вершины (даже если можно посещать одну и ту же вершину несколько раз). Докажите, что все вершины графа можно раскрасить в красный и синий цвета (оба цвета должны присутствовать), чтобы никакая стрелка не вела из красной вершины в синюю.

Решение 1. Заметим, что существует пара вершин A и B , такая что нет пути из A в B (иначе граф был бы сильно связным, и все вершинам можно было обойти «в тупую»: из первой каким-то путём во вторую, из второй в третью и т. д.). Заразим вершину A красным вирусом, распространим вирус по стрелкам, все незаражённые вершины покрасим в синий. Тогда цвета непусты (A — красная, B — синяя), и нет красно-синих рёбер (иначе синяя была бы заражена).

Решение 2. Как и в первом решении, из условия мгновенно следует, что граф не сильно связан. Но тогда достаточно покрасить в синий ту компоненту сильной связности, в которую не ведёт ни одна стрелка (такая компонента существует, так как граф компонент ациклический). Всё остальное покрасить в красный.

4. На математическом кружке у любых двух школьников ровно пять общих знакомых. Докажите, что общее число знакомств кратно трём.

Решение. Пусть в графе s рёбер. Тогда в нём ровно $5s/3$ треугольников — целое число.

5. Все n вершин графа G занумерованы. Известно, что множество вершин графа можно разбить на пять (потенциально пустых) долей с условием, чтобы внутри этих долей не было рёбер, причём это можно сделать **единственным** с точностью до перестановки долей образом. Докажите, что в графе хотя бы $4n - 10$ рёбер.

Решение. Лемма: если граф можно единственным образом разбить на две доли, то он связный.

Докажем лемму от противного: если граф несвязный, то можно поменять местами доли в одной компоненте связности (остальные компоненты не трогаем) и получить другое разбиение. Противоречие. Лемма доказана.

Обозначим количества вершин в компонентах x_1, x_2, \dots, x_5 . Тогда рёбра между любыми двумя компонентами образуют хотя бы дерево, т.е. между компонентами i и j хотя бы $x_i + x_j - 1$ ребро. Суммируя по всем парам i, j , получаем требуемое.

6. Барон Мюнхгаузен вернулся из отпуска. «Удивительная страна. Стоимости перелётов между всеми парами городов разные, но у всех циклических маршрутов, проходящих по всем городам, суммарная стоимость перелётов одинаковая». Известно, что городов не менее 2016 и что любые два из них соединены двусторонней авиалинией, причём стоимость перелёта между двумя городами одинаковая в обоих направлениях. Могли ли слова барона оказаться правдой?

Решение. Занумеруем города. Присвоим городу с номером i число 2^i . Каждому ребру назначим стоимость равную сумме чисел на концах. Числа на рёбрах различны, так как у них разные двоичные записи. Все гамильтоновы циклы имеют одну и ту же стоимость, а именно удвоенную сумму чисел городов.

Комментарий. Самое сложное в этой задаче — догадаться до правильного ответа. В действительности вы имеете дело с огромной системой линейных уравнений, которая, на первый взгляд, решений иметь не должна. Но попытки доказать несовместность этой системы ломаются одна за другой. Это должно навести на мысль, что, возможно, к задаче стоит подойти с другой стороны и попытаться построить пример. Этот пример должен удовлетворять огромной симметричной системе условий, «руками» его делать не понятно как. Во многих чисто комбинаторных задачах часто помогают различные алгебраические конструкции, и иногда имеет смысл именно в таком ключе думать: «а какая алгебраическая конструкция может мне обеспечить необходимые свойства?»

7. Докажите, что в любом сильно связном ориентированном графе на $n \geq 3$ вершинах можно выкинуть несколько стрелок, оставив не более $2n - 3$, так, чтобы граф остался сильно связным. Напомним, что ориентированный граф называется *сильно связным*, если из любой его вершины можно добраться в любую другую, двигаясь по стрелкам. Любые две вершины графа соединены не более чем одной стрелкой.

Решение 1. Лемма: в любом сильно связном ориентированном *мультиграфе* (это когда разрешены кратные рёбра) на n вершинах можно оставить $2n - 2$ стрелки без потери сильной связности.

Доказательство леммы: по индукции по числу вершин. В графе с $n = 1$ вершиной можно оставить 0 стрелок — база проверена. Переход: берём граф с n вершинами, в силу сильной связности там существует простой цикл C длины $s \geq 2$. Возьмём и склеим вершины цикла в одну. Формально: построим новый граф G' , вершинами которого являются вершины $G \setminus C$ («выжившие»), плюс ещё одна новая вершина c («склеенный цикл»). Стрелки между выжившими вершинами в G' устроены так же, как в G ; стрелки внутри C исчезнут бесследно; наконец, каждой стрелке между выжившей вершиной u и вершиной из C в G нарисуем соответствующую стрелку между u и c в G' . Легко убедиться, что мультиграф G' тоже сильно связный, а значит по предположению индукции в нём можно оставить не более чем $2(n - s + 1) - 2$ стрелок без потери сильной связности. А теперь в G оставим те же стрелки, что сохранились в G' , и проведём s стрелок внутри цикла C . Легко проверить, что получится действительно сильно связный граф, в котором рёбер не более чем $2(n - s + 1) - 2 + s = 2n - s \leq 2n - 2$. Лемма доказана.

Для решения самой задачи достаточно заметить, что самый первый цикл, который мы склеим, будет иметь длину хотя бы $s \geq 3$ (в силу запрета мультиграфов), а значит самый последний

индукционный шаг даст оценку $2n - s \leq 2n - 3$.

Комментарий: индуктивный спуск — довольно стандартная идея в графах. Иногда основная сложность задачи сосредоточена в правильной формулировке утверждения индукции: часто приходится расширять или сужать класс объектов и усиливать или ослаблять утверждение индукции для того чтобы индуктивная цепочка заработала. Описанный здесь переход индукции выводит нас за пределы класса ориентированных графов в класс ориентированных мультиграфов (что легко пропустить мимо внимания и получить неверное решение).

Решение 2. Зафиксируем вершину A . Изначально все стрелки бесцветные. Для каждой вершины графа закрасим чёрным по одному простому пути в A (пути могут пересекаться). Если из какой-то вершины B торчат две или больше чёрных стрелок, то можно оставить чёрной из них одну без потери чёрной достижимости $B \rightarrow A$ (остальные стрелки сделать опять бесцветными). Такими операциями можно добиться того, что из всех вершин, кроме A , будет выходить ровно одна чёрная стрелка, и что из любой вершины существует чёрный путь до A . Сейчас ровно $n - 1$ стрелка закрашена чёрным («чёрное дерево»).

Заразим вершину A вирусом, который передаётся по чёрным стрелкам. Ключевое наблюдение: так как в исходном графе все вершины были бы заражены вирусом, то, пока не все вершины заражены, всегда существует бесцветная стрелка («ключевая»), по которой можно передать вирус в новую вершину. Будем закрашивать чёрным какую-нибудь ключевую стрелку, распространять вирус и повторять процедуру. Если эти решения хоть кто-то читает, сообщите мне об этом на занятии. После очернения первой ключевой стрелки будут заражены хотя бы три вершины (так как возникнет чёрный цикл), на каждом следующем шаге будет заражена хотя бы одна новая вершина. Следовательно, не более чем за $n - 2$ шага мы заразим весь граф. Итого закрашено чёрным не более чем $n - 1 + n - 2 = 2n - 3$ стрелок. Сильная связность обеспечена: чёрное дерево позволит нам добраться из любой вершины до A , а оттуда можно добраться куда угодно по траектории вируса.

8. Граф G имеет n вершин одинаковой ненулевой степени. Докажите, что в нём можно выделить не менее $n/3$ непересекающихся рёбер.

Решение. Выделим максимально паросочетание, путь оно состоит из m красных рёбер. Множество концов рёбер этого паросочетания обозначим A , все остальные вершины — B ($|A| = 2m, |B| = n - 2m$). Ясно, что вершины B попарно несмежны: иначе можно было бы найти паросочетание посolidнее. Степень вершин обозначим d . Для $d = 1$ и $d = 2$ задача очевидна, далее считаем, что $d \geq 3$.

Лемма: Из концов любого красного ребра в сумме в B уходит не более $d - 1$ ребра.

Доказательство: запрещена ситуация, когда у концов a_1 и a_2 красного ребра есть различные друзья b_1 и b_2 в B — тогда легко увеличить паросочетание: $a_1a_2 \rightarrow a_1b_1, a_2b_2$. Этот запрет и ведёт к нужной оценке:

Случай 1. Из вершин a_i выходит хотя бы по одному ребру в B . Но тогда на самом деле ровно по одному, причём в одну и ту же вершину, иначе мгновенно возникнет запрет. В сумме не больше $2 \leq d - 1$ рёбер в B .

Случай 2. Из a_1 вообще нет рёбер в B . Но тогда из a_2 в B ведёт не более $d - 1$ рёбер (их всего d , а красное ребро ведёт не в B).

Лемма доказана.

Пусть между A и B ровно s рёбер. Тогда $md > m(d - 1) \geq s = d(n - 2m)$ (второе неравенство следует из леммы, третье равенство — из того, что все рёбра из B ведут в A). Получаем, что $md > d(n - 2m) \Rightarrow 3m > n$.

Равенство достигается при $d = 2$, пример — куча треугольничков.