Графы

группа 10-1
12.09.2016

1. В связном графе $n \geqslant 5$ вершин и $2n-1$ ребро. Докажите, что в нём можно найти простой цикл, после уничтожения всех рёбер которого граф не потеряет связность.

2. На тренинг по личностному росту пришло 30 человек. Оказалось, что любых пятерых можно посадить за круглый стол с условием, чтобы рядом сидящие были знакомы. Какое минимальное количество пар знакомых может присутствовать на тренинге?

3. Про ориентированный граф известно, что не существует маршрута, проходящего через все вершины (даже если можно посещать одну и ту же вершину несколько раз). Докажите, что все вершины графа можно раскрасить в красный и синий цвета (оба цвета должны присутствовать), чтобы никакая стрелка не вела из красной вершины в синюю.

4. На математическом кружке у любых двух школьников ровно пять общих знакомых. Докажите, что общее число знакомств кратно трём.

5. Все n вершин графа G занумерованы. Известно, что множество вершин графа можно разбить на пять (потенциально пустых) долей с условием, чтобы внутри этих долей не было рёбер, причём это можно сделать `единственным` с точностью до перестановки долей образом. Докажите, что в графе хотя бы $4n-10$ ребёр.

6. Барон Мюнхгаузен вернулся из отпуска. «Удивительная страна. Стоимости перелётов между всеми парами городов разные, но у всех циклических маршрутов, проходящих по всем городам, суммарная стоимость перелётов одинаковая». Известно, что городов не менее 2016 и что любые два из них соединены двусторонней авиалинией, причём стоимость перелёта между двумя городами одинаковая в обоих направлениях. Могли ли слова барона оказаться правдой?

7. Докажите, что в любом сильно связном ориентированном графе на $n \geqslant 3$ вершинах можно выкинуть несколько стрелок, оставив не более $2n-3$, так, чтобы граф остался сильно связным. Напомним, что ориентированный граф называется *сильно связным*, если из любой его вершины можно добраться в любую другую, двигаясь по стрелками. Любые две вершины графа соединены не более чем одной стрелкой.

8. Граф G имеет n вершин одинаковой ненулевой степени. Докажите, что в нём можно выделить не менее $n/3$ непересекающихся рёбер.