Убегающие **Квадратные трёхчлены** 18 января 2017

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

2. Различные a, b, c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите $a + b + c$.

3. Найдите все пары чисел (p, q) таких, что оба уравнения $x^2 - px + q = 0$ и $x^2 - qx + p = 0$ имеют по два различных натуральных корня.

4. Андрей Борисович придумал коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ — натуральные числа, сумма которых равна 2000. Алексей Вадимович может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.

5. Приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$ не имеют действительных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ и $g(g(x)) = 0$ тоже не имеет действительных корней.

6. Квадратные трёхчлены $ax^2 + bx + c$ и $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$ имеют по два целых корня. Могут ли все числа a, b, c оказаться целыми?

7. Рассматриваются всевозможные приведённые квадратные трёхчлены, все коэффициенты которых являются натуральными числами, не превосходящими 2017. Каких трёхчленов среди них больше: имеющих целые корни или не имеющих действительных корней?

8. Сколькими способами числа $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{2017}$ можно разбить на два непустых множества A и B так, чтобы уравнение $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$, где $S(M)$ – сумма чисел множества M, имело целый корень?

9. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трёхчленов $x^2 f(\frac{1}{x} + 1)$ или $(x-1)^2 f(\frac{1}{x-1})$. Можно ли с помощью нескольких таких операций из квадратного трёхчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трёхчлен $x^2 + 10x + 9$?

Убегающие **Квадратные трёхчлены** 18 января 2017

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

2. Различные a, b, c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите $a + b + c$.

3. Найдите все пары чисел (p, q) таких, что оба уравнения $x^2 - px + q = 0$ и $x^2 - qx + p = 0$ имеют по два различных натуральных корня.

4. Андрей Борисович придумал коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ — натуральные числа, сумма которых равна 2000. Алексей Вадимович может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.

5. Приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$ не имеют действительных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ и $g(g(x)) = 0$ тоже не имеет действительных корней.

6. Квадратные трёхчлены $ax^2 + bx + c$ и $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$ имеют по два целых корня. Могут ли все числа a, b, c оказаться целыми?

7. Рассматриваются всевозможные приведённые квадратные трёхчлены, все коэффициенты которых являются натуральными числами, не превосходящими 2017. Каких трёхчленов среди них больше: имеющих целые корни или не имеющих действительных корней?

8. Сколькими способами числа $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{2017}$ можно разбить на два непустых множества A и B так, чтобы уравнение $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$, где $S(M)$ – сумма чисел множества M, имело целый корень?

9. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трёхчленов $x^2 f(\frac{1}{x} + 1)$ или $(x-1)^2 f(\frac{1}{x-1})$. Можно ли с помощью нескольких таких операций из квадратного трёхчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трёхчлен $x^2 + 10x + 9$?