Убегающие КБШ 30 ноября 2016

1. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Рассмотрев квадратное уравнение $(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2=0$ и задумавшись об его дискриминанте, докажите, что для любых действительных $a_1, a_2, \ldots a_n$, $b_1, b_2, \ldots b_n$ справедливо

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 .$$

2. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца в виде дробей. Использовав предыдущую задачу, докажите, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и положительных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n} .$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

4. С помощью КБШ для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

5. Для действительных чисел α и β докажите, что $\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha+\cos\beta \leqslant 2$.

6. Известно, что $a-2b+4c+5d-11e+43f \geqslant 2016$. Найдите минимум выражения

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2.$$

7. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

8. Из точки X внутри данного треугольника ABC опускаются перпендикуляры XA_1, XB_1, XC_1 на стороны BC, CA, AB соответственно. Где должна находиться точка X, чтобы наименьшее значение принимала величина $\frac{BC}{XA_1}+\frac{CA}{XB_1}+\frac{AB}{XC_1}$?

9. Для положительных чисел a, b, c таких, что $abc=1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

10. Для положительных чисел a, b, c, d таких, что $ab+bc+cd+da=1$, докажите неравенство

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3} .$$

Убегающие КБШ 30 ноября 2016

1. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Рассмотрев квадратное уравнение $(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2=0$ и задумавшись об его дискриминанте, докажите, что для любых действительных $a_1, a_2, \ldots a_n$, $b_1, b_2, \ldots b_n$ справедливо

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 .$$

2. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца в виде дробей. Использовав предыдущую задачу, докажите, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и положительных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n} .$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

4. С помощью КБШ для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

5. Для действительных чисел α и β докажите, что $\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha+\cos\beta \leqslant 2$.

6. Известно, что $a-2b+4c+5d-11e+43f \geqslant 2016$. Найдите минимум выражения

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2.$$

7. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

8. Из точки X внутри данного треугольника ABC опускаются перпендикуляры XA_1, XB_1, XC_1 на стороны BC, CA, AB соответственно. Где должна находиться точка X, чтобы наименьшее значение принимала величина $\frac{BC}{XA_1}+\frac{CA}{XB_1}+\frac{AB}{XC_1}$?

9. Для положительных чисел a, b, c таких, что $abc=1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

10. Для положительных чисел a, b, c, d таких, что $ab+bc+cd+da=1$, докажите неравенство

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3} .$$