

1. а) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D . В треугольники ABD и ACD вписаны окружности ω_1 и ω_2 , которые касаются стороны AD в точках X и Y соответственно. Выразите длину отрезка XY через длины отрезков AB, AC, BD и CD .

б) Пусть A_1 — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной BC . Докажите, что ω_1 и ω_2 касаются тогда и только тогда, когда точки D и A_1 совпадают.

в) Сформулируйте и докажите утверждение аналогичное пункту б) для вневписанных окружностей треугольников ABD и ACD .

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC , касаются. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники BCD и BAD , тоже касаются.

3. Дан выпуклый? четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD — в точке Q .

а) Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ описанный?, то $AP + CQ = AQ + CP$.

б) Докажите, что если $AP + CQ = AQ + CP$, то четырехугольник $ABCD$ описанный?.

в) Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ описанный?, то $BP + BQ = DP + DQ$.

г) Докажите, что если $BP + BQ = DP + DQ$, то четырехугольник $ABCD$ описанный?.

4. Через точки пересечения продолжений? сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены две прямые, делящие его на четыре четырехугольника. Докажите, что если четырехугольники, примыкающие к вершинам B и D , описанные, то четырехугольник $ABCD$ тоже описанный?.

5. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки E, F, G, H соответственно, P — точка пересечения отрезков EG и FH . Докажите, что если четырехугольники $HAEP, EBFP, FCGP, GDHP$ описанные, то и четырехугольник $ABCD$ тоже описанный?.

6. Чевианы AM, BN и CK треугольника ABC пересекаются в точке O . Оказалось, что четырехугольники $ANOK$ и $BKOM$ являются описанными. Докажите, что четырехугольник $CMON$ также является описанным.

1. а) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D . В треугольники ABD и ACD вписаны окружности ω_1 и ω_2 , которые касаются стороны AD в точках X и Y соответственно. Выразите длину отрезка XY через длины отрезков AB, AC, BD и CD .

б) Пусть A_1 — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной BC . Докажите, что ω_1 и ω_2 касаются тогда и только тогда, когда точки D и A_1 совпадают.

в) Сформулируйте и докажите утверждение аналогичное пункту б) для вневписанных окружностей треугольников ABD и ACD .

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC , касаются. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники BCD и BAD , тоже касаются.

3. Дан выпуклый? четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD — в точке Q .

а) Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ описанный?, то $AP + CQ = AQ + CP$.

б) Докажите, что если $AP + CQ = AQ + CP$, то четырехугольник $ABCD$ описанный?.

в) Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ описанный?, то $BP + BQ = DP + DQ$.

г) Докажите, что если $BP + BQ = DP + DQ$, то четырехугольник $ABCD$ описанный?.

4. Через точки пересечения продолжений? сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены две прямые, делящие его на четыре четырехугольника. Докажите, что если четырехугольники, примыкающие к вершинам B и D , описанные, то четырехугольник $ABCD$ тоже описанный?.

5. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки E, F, G, H соответственно, P — точка пересечения отрезков EG и FH . Докажите, что если четырехугольники $HAEP, EBFP, FCGP, GDHP$ описанные, то и четырехугольник $ABCD$ тоже описанный?.

6. Чевианы AM, BN и CK треугольника ABC пересекаются в точке O . Оказалось, что четырехугольники $ANOK$ и $BKOM$ являются описанными. Докажите, что четырехугольник $CMON$ также является описанным.