Убегающие **Об одной известной Лемме** 16 ноября 2016

Лемма Холла. Есть n юношей и несколько девушек. Тогда все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых тогда и только тогда, любому набору из k юношей в совокупности знакомы не менее k девушек.

1. Прямоугольный лист бумаги разбит на 100 многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на 100 других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот лист можно проткнуть 100 иголками так, что каждый многоугольник будет проткнут по разу.

2. Докажите, что ребра двудольного графа, степень каждой вершины которого равна k, можно правильно раскрасить в k цветов (из каждой вершины должны выходить ребра всех цветов по одному разу).

3. Латинским называется прямоугольник m x n, $m \leq n$, заполненный числами от 1 до n, такой, что в каждой строчке и в каждом столбце числа различны. Докажите, что любой латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата n x n.

4. Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков (чтобы не создавать предпосылок для драки).

5. В множестве A 2013 элементов. Докажите, что ко всем 1001-элементным подмножествам можно добавить по одному элементу так, чтобы все получившиеся 1002-элементные подмножества были бы различны.

6. Пусть в таблице n x n записаны неотрицательные числа и суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце равны 1. Докажите, что можно выбрать n клеток таблицы, из которых никакие две не стоят в одном и том же столбце и в одной и той же строке, и при этом в каждой выбранной клетке число будет положительным.

7. В лагерь приехали m мальчиков и d девочек. Каждая девочка знакома не более, чем с 10 мальчиками, а каждый мальчик — не менее, чем с одной девочкой. Оказалось, что у каждого мальчика больше знакомых девочек, чем у любой знакомой с ним девочки — знакомых мальчиков. Докажите, что $d \geq 1,1m$.

8. В тесте по олимпиадной математике было n задач. Известно, что любых двух школьников есть задача которую решил первый, но не решил второй и наоборот. Найдите наибольшее возможное число участников.

Убегающие **Об одной известной Лемме** 16 ноября 2016

Лемма Холла. Есть n юношей и несколько девушек. Тогда все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых тогда и только тогда, любому набору из k юношей в совокупности знакомы не менее k девушек.

1. Прямоугольный лист бумаги разбит на 100 многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на 100 других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот лист можно проткнуть 100 иголками так, что каждый многоугольник будет проткнут по разу.

2. Докажите, что ребра двудольного графа, степень каждой вершины которого равна k, можно правильно раскрасить в k цветов (из каждой вершины должны выходить ребра всех цветов по одному разу).

3. Латинским называется прямоугольник m x n, $m \leq n$, заполненный числами от 1 до n, такой, что в каждой строчке и в каждом столбце числа различны. Докажите, что любой латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата n x n.

4. Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков (чтобы не создавать предпосылок для драки).

5. В множестве A 2013 элементов. Докажите, что ко всем 1001-элементным подмножествам можно добавить по одному элементу так, чтобы все получившиеся 1002-элементные подмножества были бы различны.

6. Пусть в таблице n x n записаны неотрицательные числа и суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце равны 1. Докажите, что можно выбрать n клеток таблицы, из которых никакие две не стоят в одном и том же столбце и в одной и той же строке, и при этом в каждой выбранной клетке число будет положительным.

7. В лагерь приехали m мальчиков и d девочек. Каждая девочка знакома не более, чем с 10 мальчиками, а каждый мальчик — не менее, чем с одной девочкой. Оказалось, что у каждого мальчика больше знакомых девочек, чем у любой знакомой с ним девочки — знакомых мальчиков. Докажите, что $d \geq 1,1m$.

8. В тесте по олимпиадной математике было n задач. Известно, что любых двух школьников есть задача которую решил первый, но не решил второй и наоборот. Найдите наибольшее возможное число участников.