Убегающие

Теорема Виета

11 ноября 2016

1. Теорема Виета. Пусть многочлен $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ имеет ровно n корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда выполняются соотношения

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \ldots \\ \sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} = (-1)^k\cdot\frac{a_{n-k}}{a_n} \\ \ldots \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\cdot\frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

2. Пусть x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3-2x^2+x+1=0$. Составьте кубическое уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{x_1^2}$, $\frac{1}{x_2^2}$, $\frac{1}{x_3^2}$.

3. Докажите, что сумма кубов трёх корней уравнения $x^3+px+q=0$ с целыми коэффициентами есть целое число, делящееся на 3.

4. Даны такие действительные числа $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$ и $b_1\leqslant b_2\leqslant b_3$, что $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$, $a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3=b_1b_2+b_2b_3+b_1b_3$. Докажите, что если $a_1\leqslant b_1$, то $a_3\leqslant b_3$.

5. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ имеет четыре положительных корня с учётом кратности. Найдите наименьшее значение коэффициента b при этом условии.

6. На доске написано несколько приведённых многочленов 111-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на такие два приведённых многочлена 111-й степени f_1 и g_1, что $f+g=f_1+g_1$ или $fg=f_1g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 111 различных положительных корней.

7. Существуют ли такие ненулевые числа a, b, c, что при любом $n>3$ можно найти многочлен вида $P_n(x)=x^n+\ldots+ax^2+bx+c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?

Убегающие

Теорема Виета

11 ноября 2016

1. Теорема Виета. Пусть многочлен $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ имеет ровно n корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда выполняются соотношения

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \ldots \\ \sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} = (-1)^k\cdot\frac{a_{n-k}}{a_n} \\ \ldots \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\cdot\frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

2. Пусть x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3-2x^2+x+1=0$. Составьте кубическое уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{x_1^2}$, $\frac{1}{x_2^2}$, $\frac{1}{x_3^2}$.

3. Докажите, что сумма кубов трёх корней уравнения $x^3+px+q=0$ с целыми коэффициентами есть целое число, делящееся на 3.

4. Даны такие действительные числа $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$ и $b_1\leqslant b_2\leqslant b_3$, что $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$, $a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3=b_1b_2+b_2b_3+b_1b_3$. Докажите, что если $a_1\leqslant b_1$, то $a_3\leqslant b_3$.

5. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ имеет четыре положительных корня с учётом кратности. Найдите наименьшее значение коэффициента b при этом условии.

6. На доске написано несколько приведённых многочленов 111-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на такие два приведённых многочлена 111-й степени f_1 и g_1, что $f+g=f_1+g_1$ или $fg=f_1g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 111 различных положительных корней.

7. Существуют ли такие ненулевые числа a, b, c, что при любом $n>3$ можно найти многочлен вида $P_n(x)=x^n+\ldots+ax^2+bx+c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?