Убегающие

Прямая Симсона

21 октября 2016

1. Прямая Симсона. Рассмотрим треугольник ABC и произвольную точку P. Основания перпендикуляров из точки P на прямые AB, AC, BC лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

2. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что основания перпендикуляров из точки A_1 на прямые AB, AC, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

3. Даны точки A, B, C, лежащие на одной прямой, и точка P вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, ACP, BCP и точка P лежат на одной окружности.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проходит прямая, пересекающая окружности в точках C и D. Точки P и Q — проекции точки B на касательные к окружностям, проведенным в точках C и D. Докажите, что прямая PQ касается окружности, построенной на AB как на диаметре.

5. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы. Докажите, что точка, симметричная A относительно B_1C_1, лежит на прямой BC.

6. В треугольнике ABC из произвольной точки P дуги BC описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры PX и PY на стороны AB и BC. Пусть M и N — середины отрезков AC и XY. Докажите, что $\angle MNP = 90°$.

7. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, P — произвольная точка на описанной окружности ABC. Докажите, что прямая Симсона точки P делит отрезок PH пополам.

8. a) Теорема Морлея. В треугольнике ABC провели трисектрисы углов. Пусть A_1 — точка пересечения ближайших к стороне BC трисектрис углов B и C. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ правильный, а $\angle AB_1C_1 = 60° + \frac{\angle C}{3}$.

b*) Докажите, что на описанной окружности треугольника ABC найдется три точки таких, что их прямые Симсона касаются окружности Эйлера, причем эти точки образуют правильный треугольник, стороны которого параллельны сторонам треугольника Морлея.

Убегающие

Прямая Симсона

21 октября 2016

1. Прямая Симсона. Рассмотрим треугольник ABC и произвольную точку P. Основания перпендикуляров из точки P на прямые AB, AC, BC лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

2. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что основания перпендикуляров из точки A_1 на прямые AB, AC, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

3. Даны точки A, B, C, лежащие на одной прямой, и точка P вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, ACP, BCP и точка P лежат на одной окружности.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проходит прямая, пересекающая окружности в точках C и D. Точки P и Q — проекции точки B на касательные к окружностям, проведенным в точках C и D. Докажите, что прямая PQ касается окружности, построенной на AB как на диаметре.

5. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы. Докажите, что точка, симметричная A относительно B_1C_1, лежит на прямой BC.

6. В треугольнике ABC из произвольной точки P дуги BC описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры PX и PY на стороны AB и BC. Пусть M и N — середины отрезков AC и XY. Докажите, что $\angle MNP = 90°$.

7. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, P — произвольная точка на описанной окружности ABC. Докажите, что прямая Симсона точки P делит отрезок PH пополам.

8. a) Теорема Морлея. В треугольнике ABC провели трисектрисы углов. Пусть A_1 — точка пересечения ближайших к стороне BC трисектрис углов B и C. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ правильный, а $\angle AB_1C_1 = 60° + \frac{\angle C}{3}$.

b*) Докажите, что на описанной окружности треугольника ABC найдется три точки таких, что их прямые Симсона касаются окружности Эйлера, причем эти точки образуют правильный треугольник, стороны которого параллельны сторонам треугольника Морлея.